Geometrie

Die Simpson-Gerade

Autor: Peter Andree

Inhaltsverzeichnis

2 Die Simpson-Gerade

2.1 Satz und klassischer Beweis

Satz – Die Simpson-Gerade
Gegeben wird ein Dreieck ABC und der umschriebene Kreis. Die Projektionen eines beliebigen Kreispunktes auf die Dreiecksseiten sind kollinear. □

Beweis: Wir betrachten die Abbildung(1). $[PD] \perp [AB], [PE] \perp [BC], [PF] \perp [CA]$. Die Kollinearität der drei Punkte D, E und F drücken wir mathematisch wie folgt aus:

$$(a) \quad \angle PFD \equiv \angle PFE \text{ oder } (b) \quad \angle FED = \pi \tag{1}$$

Wir beweisen die Beziehung (1)(a).

$$\begin{aligned}
&PFCE \text{ ist Sehnenviereck } (\angle PFC + \angle PEC = \pi) \Rightarrow \angle PFE \equiv \angle PCE \\
&PFAD \text{ ist Sehnenviereck } (\angle PFA + \angle PDA = \pi) \Rightarrow \angle PFD \equiv \angle PAD. \\
&\angle PCE \equiv \angle PCE \equiv \angle PAB \text{ (Umfangswinkel) } \Rightarrow \angle PFE \equiv \angle PFD
\end{aligned}$$

Somit ist laut (1)(a) bewiesen, dass D, E und F kollinear sind □

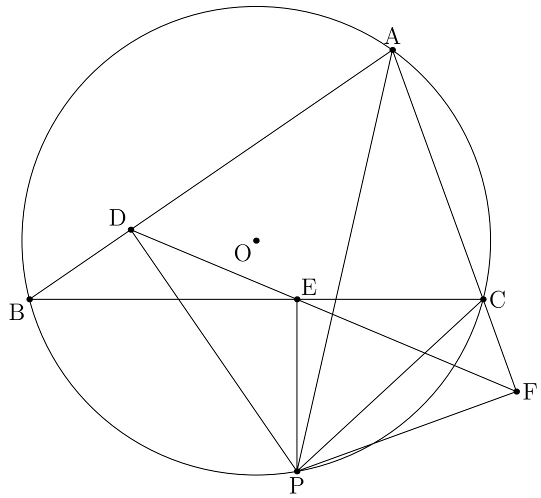

Abbildung 1: Die Simpson-Gerade

2.2 Eine interessante Kreiseigenschaft

Satz – Kreiseigenschaft
Gegeben wird ein Kreis und eine Kreissehne $[AB]$. M ist ein beliebiger Punkt des Kreises und Q die Projektion von M auf $[AB]$. Dann gilt:

$$\frac{|QA|}{|QB|} = \frac{|MA|}{|MB|} \cdot \frac{|SB|}{|SA|} \tag{2}$$

wobei S der Symmetriepunkt von M bezüglich dem Kreismittelpunkt ist. □

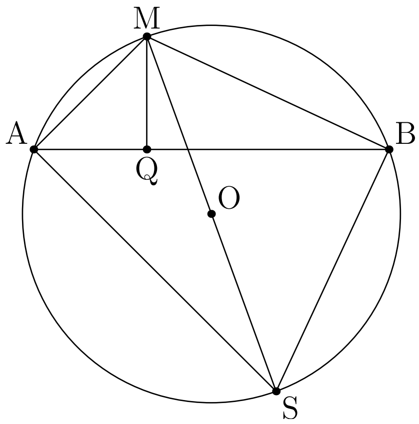

Abbildung 2: Kreispunkt und seine Projektionen

Beweis: Wir bedienen uns der Ähnlichkeit der Dreiecke.

$$\triangle MAQ \sim \triangle MSB \text{ folgt } \frac{|MA|}{|MS|} = \frac{|AQ|}{|SB|} = \frac{|QM|}{|MB|} \text{ und } |AQ| = \frac{|MA| \cdot |SB|}{2R}. \tag{3}$$

$$\triangle MBQ \sim \triangle MSA \text{ folgt } \frac{|MB|}{|MS|} = \frac{|BQ|}{|SA|} = \frac{|QM|}{|AM|} \text{ und } |BQ| = \frac{|SA| \cdot |MB|}{2R}. \qquad (4)$$

Aus den Beziehungen (**3**) und (**4**) folgt $\frac{|QA|}{|QB|} = \frac{|MA|}{|MB|} \cdot \frac{|SB|}{|SA|}$, was zu beweisen war. □

2.3 Ein anderer Beweis für den Satz der Simpson-Gerade

Es sei nun der mobile Punkt P auf dem Kreis, siehe Abbildung (1). Mit der erwähnten Kreiseigenschaft und dem Kehrsatz von Menelaus versuchen wir die Kollinearität der Punkte zu beweisen.

Beweis: Es sei S der Symmetriepunkt von M bezüglich dem Kreismittelpunkt.

$$[PD] \perp [AB]\,, \quad \frac{|DA|}{|DB|} = \frac{|PA|}{|PB|} \cdot \frac{|SB|}{|SA|} \qquad (5)$$

$$[PE] \perp [BC]\,, \quad \frac{|EB|}{|EC|} = \frac{|PB|}{|PC|} \cdot \frac{|SC|}{|SB|} \qquad (6)$$

$$[PF] \perp [CA]\,, \quad \frac{|FC|}{|FA|} = \frac{|PC|}{|PA|} \cdot \frac{|SA|}{|SC|} \qquad (7)$$

Multiplizieren wir nun (**5**), (**6**) und (**7**) erhalten wir $\frac{|DA|}{|DB|} \cdot \frac{|EB|}{|EC|} \cdot \frac{|FC|}{|FA|} = 1$. Laut Kehrsatz von Menelaus sind die Punkte D, E und F kollinear □