

# Geometrie

## Der Punkt von Fermat

Autor: Peter Andree

### Inhaltsverzeichnis

<b>9 Der Punkt von Fermat</b>	<b>1</b>
9.1 Die Aufgabe von Fermat an Torricelli . . . . .	1
9.2 Der klassische, analytische Beweis . . . . .	2
9.3 Der Hofmann-Beweis. Die Rotation und der Punkt von Fermat . . . . .	4
9.4 Die Verallgemeinerung von Viviani und der Punkt von Fermat . . . . .	4
9.5 Die Konstruktion des Punktes . . . . .	6
9.6 Berechnung der Summe der Abstände . . . . .	7

## 9 Der Punkt von Fermat

### 9.1 Die Aufgabe von Fermat an Torricelli

Der französische Mathematiker **Pierre de Fermat** (1601–1665) stellte dem italienischen Mathematiker **Evangelista Torricelli** (1608–1647) die folgende Aufgabe:

Gegeben wird ein Dreieck. Bestimme einen Punkt  $P$ , so dass die Summe seiner Abstände zu den Eckpunkten des Dreiecks minimal ist.

Im Laufe der Zeit ist dieser Punkt als **Punkt von Fermat** in die Mathematik eingegangen. In den folgenden Kapiteln untersuchen wir einige bekannte und nicht bekannte Beweise, konstruieren den Punkt und berechnen den kleinsten Wert der Summe dieser Abstände.

Allen dürfte der klassische, analytische Beweis bekannt sein. Weniger bekannt, aber bestechend und faszinierend durch seine Einfachheit und Schönheit ist der Beweis von E. Hofmann, aus dem Jahre 1929, „Elementare Lösung einer Minimumsaufgabe“, aus „**Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht**“,

siehe [1].

Anschließend versuchen wir einen Beweis zu entwickeln, dem eine Verallgemeinerung des Satzes von Viviani zu Grunde liegt, um damit eine Extremalaufgabe mit Bedingungen aufzubauen.

## 9.2 Der klassische, analytische Beweis

Hier einige Bezeichnungen und ihre Bedeutung:

1. Im Dreieck  $\triangle ABC$  benutzen wir die üblichen Bezeichnungen:

$$|AB| = c, |BC| = a, |CA| = b.$$

2.  $d_{P,A}$  ist das Mass der der Strecke vom Punkt  $P$  zum Punkt  $A$ ,  $d_{P,A} = |PA|$
3. Koordinaten der Punkte:  $A(a_x | a_y)$ ,  $B(b_x | b_y)$ ,  $C(c_x | c_y)$ ,  $P(x | y)$ .
4. Den Winkel der Geraden durch die Punkte  $P$  und  $A$  mit der  $x$ -Achse bezeichnen wir mit  $\varphi_A$ . Analog haben wir die Winkel  $\varphi_B$  und  $\varphi_C$ .

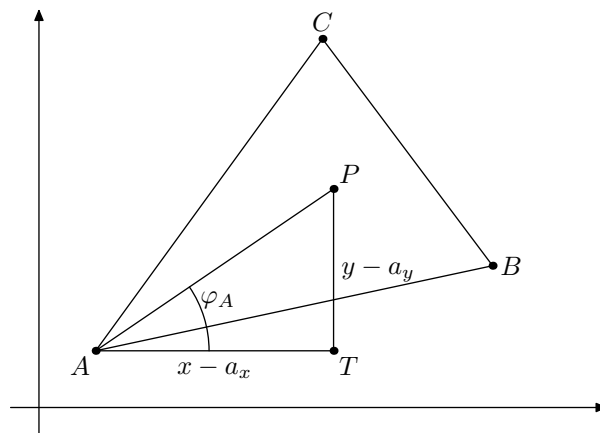


Abbildung 1: Der Punkt von Fermat

Die Bezeichnungen berücksichtigend, schreiben wir die Summe der Abstände.

$$\begin{aligned} d(x, y) &= d_{P,A}(x, y) + d_{P,B}(x, y) + d_{P,C}(x, y) \\ &= \sqrt{(x - a_x)^2 + (y - a_y)^2} + \sqrt{(x - b_x)^2 + (y - b_y)^2} + \sqrt{(x - c_x)^2 + (y - c_y)^2} \end{aligned} \quad (1)$$

Der gesuchte Punkt befindet sich eventuell zwischen den Nullstellen der partiellen Ableitungen von  $d(x, y)$ .

$$\frac{\partial d(x, y)}{\partial x} = \frac{x - a_x}{d_{P,A}(x, y)} + \frac{x - b_x}{d_{P,B}(x, y)} + \frac{x - c_x}{d_{P,C}(x, y)} \quad (2)$$

$$\frac{\partial d(x, y)}{\partial y} = \frac{y - a_y}{d_{P,A}(x, y)} + \frac{y - b_y}{d_{P,B}(x, y)} + \frac{y - c_y}{d_{P,C}(x, y)} \quad (3)$$

Die Ableitungen aus den Beziehungen (2) und (3) existieren nur für Punkte  $P$ , die nicht identisch mit den Punkten  $A$ ,  $B$ , oder  $C$  sind. Mit unseren Bezeichnungskonventionen folgt

$$\frac{x - a_x}{d_{P,A}(x, y)} = \cos \varphi_A, \text{ analog } \cos \varphi_B, \cos \varphi_C, \quad (4)$$

$$\frac{y - a_y}{d_{P,A}(x, y)} = \sin \varphi_A, \text{ analog } \sin \varphi_B, \sin \varphi_C, \quad (5)$$

wobei die Funktionen Sinus und Kosinus der Winkel  $\varphi_A, \varphi_B, \varphi_C$  allesamt von  $x$  und  $y$  abhängig sind. Damit können wir die Beziehungen (2) und (3) in einer sehr kurzen Form schreiben:

$$\frac{\partial d(x, y)}{\partial x} = \cos \varphi_A + \cos \varphi_B + \cos \varphi_C \quad (6)$$

$$\frac{\partial d(x, y)}{\partial y} = \sin \varphi_A + \sin \varphi_B + \sin \varphi_C \quad (7)$$

Der gesuchte Punkt, wenn es ihn überhaupt gibt, befindet sich in der Lösungsmenge des Systems:

$$\cos \varphi_A + \cos \varphi_B + \cos \varphi_C = 0 \quad (8)$$

$$\sin \varphi_A + \sin \varphi_B + \sin \varphi_C = 0$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung des Systems (8) mit  $\sin \varphi_C$  und die zweite mit  $\cos \varphi_C$ , erhalten wir durch Subtraktion der zwei Gleichungen

$$\sin(\varphi_C - \varphi_A) = \sin(\varphi_B - \varphi_C), \text{ oder } \varphi_C - \varphi_A = \varphi_B - \varphi_C \pmod{2\pi}. \quad (9)$$

Analog findet man  $\varphi_B - \varphi_C = \varphi_A - \varphi_B \pmod{2\pi}$ . Dementsprechend folgern wir, dass

$$\varphi_A - \varphi_B = \varphi_B - \varphi_C = \varphi_C - \varphi_A \pmod{2\pi} \quad (10)$$

Interpretieren wir dieses Ergebnis geometrisch, folgt

$$\angle APB = \angle BPC = \angle CPA = \frac{2\pi}{3}.$$

Das bedeutet, aus dem Punkt  $P$  werden alle Dreieckseiten unter dem gleichen Winkel gesehen. Dieses ist zutreffend, falls das Dreieck keinen stumpfen Winkel besitzt, der größer als  $2\pi/3$  ist. Diese Situation muss separat analysiert werden. Nun haben wir einen Punkt gefunden, der eventuell der Aufgabe entspricht. Es muss noch gezeigt werden, dass der Punkt  $P$  die Summe minimiert. Einen entsprechenden Beweis findet man in (16).

### 9.3 Der Hofmann–Beweis. Die Rotation und der Punkt von Fermat

Wir bezeichnen  $(ABC)$  das Innere eines Dreiecks und definieren die Funktion

$$f_M: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, f_M(P) = P',$$

die Rotation mit Zentrum  $M$  und Winkel  $60^\circ$  des Punktes  $P$ . Es sei  $X \in (ABC)$  ein

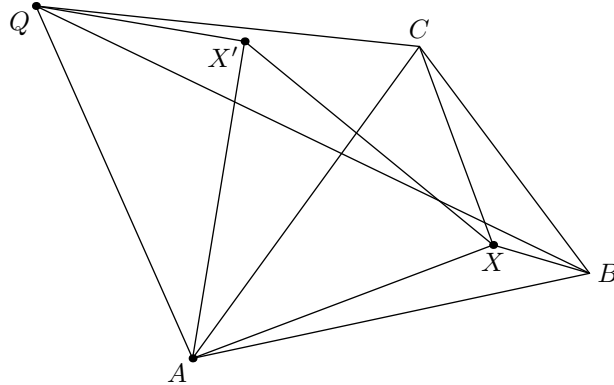


Abbildung 2: Lösungsweg mit Hilfe der Rotation

beliebiger Punkt im Inneren des Dreiecks,  $f_A(X) = X'$  und  $f_A(C) = Q$ . Die Dreiecke  $AXX'$  und  $ACQ$  sind gleichseitig.  $\triangle AXC \equiv \triangle AX'Q$  (SWS). Aus dieser Kongruenz folgt

$$d = d_{X,A} + d_{X,B} + d_{X,C} = |XA| + |XB| + |XC| = |XX'| + |XB| + |QX'|. \quad (11)$$

Unsere Summe ist die gebrochene Linie  $QX'XB$ . Das Minimum wird erreicht, wenn die gebrochene Linie eine Gerade ist, d.h.  $\angle QX'X = 180^\circ$  und  $\angle X'XB = 180^\circ$ . Da  $\angle AX'X = 60^\circ$ , folgt  $\angle QX'A = \angle AXC = 120^\circ$ . Durch analoge Überlegungen folgt  $\angle AXB = 120^\circ$  und  $\angle BXC = 120^\circ$ . Hat das Dreieck einen stumpfen Winkel größer gleich  $120^\circ$ , muss diese Situation separat behandelt werden.

### 9.4 Die Verallgemeinerung von Viviani und der Punkt von Fermat

In der Ausgabe Nr. 2, 2000, der „**Wurzel**“-Zeitschrift, findet man eine Verallgemeinerung des Satzes von Viviani. Dieser Satz spielt die zentrale Rolle des Beweises. Kurzer Extrakt dieses Satzes:

- Jede Dreieckseite bestimmt eine Gerade. Diese Gerade teilt die Ebene in zwei Halbebenen.
- Jeder Punkt  $X$  der Ebene, bestimmt drei Abstände zu den Dreiecksseiten. Es seien diese  $x$ ,  $y$  und  $z$ .

- Es seien die drei entsprechenden Dreieckshöhen  $h_a$ ,  $h_b$  und  $h_c$ .
- Wir definieren die Funktion

$$\operatorname{sgn}(x, h) = \begin{cases} +1, & \text{wenn } x, h \text{ Teilmengen derselben Halbebene.} \\ -1, & \text{wenn } x, h \text{ Teilmengen verschiedener Halbebene.} \end{cases}$$

### Satz – [Verallgemeinerung des Satzes von Viviani]

Bei gegebenem Dreieck  $\triangle ABC$  und für jeden Punkt  $P$  der Ebene, wobei  $x$ ,  $y$  und  $z$ ,  $h_a$ ,  $h_b$  und  $h_c$  Abstände und entsprechende Höhen zu den Seiten  $BC$ ,  $CA$  und  $AB$  sind, gilt die Beziehung:

$$\operatorname{sgn}(x, h_a) \frac{x}{h_a} + \operatorname{sgn}(y, h_b) \frac{y}{h_b} + \operatorname{sgn}(z, h_c) \frac{z}{h_c} = 1. \quad (12)$$

□

Betrachten wir einen beliebigen Punkt  $P \in (ABC)$ . Zu den Strecken  $[PA]$ ,  $[PB]$  und  $[PC]$  konstruieren wir die Senkrechten durch die Punkte  $A$ ,  $B$  und  $C$ , so dass diese Senkrechten sich in den Punkten  $M$ ,  $N$  und  $Q$  schneiden, siehe Abbildung (3). Somit kann der Satz (12) bezüglich dem Punkt  $P$  angewendet werden. Wir machen die

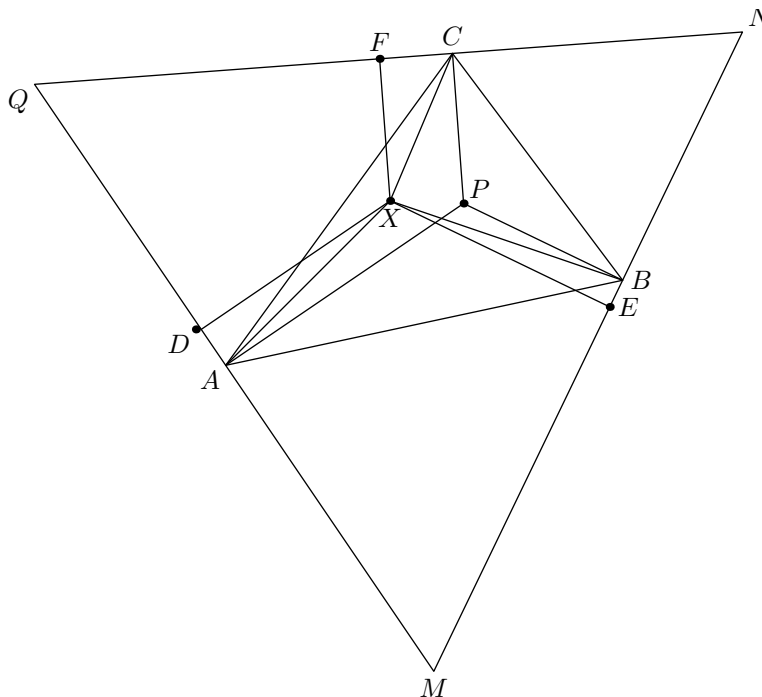


Abbildung 3: Der Punkt von Fermat und die Verallgemeinerung des Satzes von Viviani

Bezeichnungen:

$$d_{P,A} = x, \quad d_{P,B} = y, \quad d_{P,C} = z \quad \text{und} \quad d_{M,NQ} = h_m, \quad d_{N,MQ} = h_n, \quad d_{Q,MN} = h_q.$$

Laut (12), folgt

$$\frac{x}{h_n} + \frac{y}{h_q} + \frac{z}{h_m} = 1. \quad (13)$$

Es sei die zu minimierende Funktion  $F(x, y, z) = x + y + z$ . Die Funktion mit Lagrange-Multiplikator ist

$$\varphi(x, y, z) = x + y + z + \lambda \left( \frac{x}{h_n} + \frac{y}{h_q} + \frac{z}{h_m} - 1 \right) \quad (14)$$

Nun folgt mit Hilfe der partiellen Ableitungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 1 + \frac{\lambda}{h_n} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 1 + \frac{\lambda}{h_q} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 1 + \frac{\lambda}{h_m} = 0, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} = \frac{x}{h_n} + \frac{y}{h_q} + \frac{z}{h_m} - 1 = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Die Lösungsmenge von (15) führt zu  $\lambda = -h_m = -h_n = -h_q = -h$ . Das Dreieck  $MNQ$  muss gleichseitig sein.

- Da  $\angle PAQ + \angle PCQ = 180^\circ$ , ist  $PAQC$  ein Sehnenviereck.
- Da  $\angle Q = 60^\circ$ , folgt  $\angle APC = 120^\circ$ . Analoges gilt für  $\angle APB = \angle BPC = 120^\circ$ .

Damit haben wir die Lage eines Punktes  $P$  bestimmt, der die Summe eventuell extremiert. Da  $d^2\varphi(x, y, z) = 0$ , kann nicht entschieden werden, ob ein Extremum vorliegt und welcher Art es ist. Deshalb versuchen wir einen geometrischen Beweis. Wir zeigen, dass für alle  $X \neq P$ , die Summe der Abstände von  $X$  zu den Dreieckseckenpunkten größer ist, als die Abstände von  $P$ .

Es sei ein beliebiger Punkt  $X$  im Inneren des Dreiecks, siehe Abbildung (3). Wir analysieren die Summe  $|XA| + |XB| + |XC|$ , Summe der Abstände zu den Seiten:

$$|XA| + |XB| + |XC| \geq |XD| + |XE| + |XF| = H = |PA| + |PB| + |PC|, \quad (16)$$

laut Viviani. Damit ist gezeigt, dass der Punkt  $P$  die Summe minimiert und eindeutig bestimmt ist.  $P$  erfüllt die Anforderungen der Aufgabe und ist der gesuchte Punkt. Interessant ist, dass dieser Beweis auch den Wert der minimalen Summe liefert und zwar ist dieser die Länge Wert der Höhe des gleichseitigen Dreiecks  $MNQ$ . Später kommen wir auf die Berechnung zurück.

**Bemerkung:** Hat das Dreieck  $\triangle ABC$  einen stumpfen Winkel der größer als  $120^\circ$  ist, existiert das gleichseitige  $\triangle MNQ$  nicht und es folgt die Unlösbarkeit des Systems.

## 9.5 Die Konstruktion des Punktes

**Erste Konstruktionmethode:**

1. Auf zwei Seiten des Dreiecks konstruieren wir mit den entsprechenden Seitenlängen, gleichseitige Dreiecke.
2. Die geometrische Lösung mit Hilfe der Rotation erlaubt die Schlussfolgerung

$$P \in [BB'] \text{ und } P \in [AA'] \Rightarrow \{P\} = [AA'] \cap [BB'].$$

### Zweite Konstruktionmethode:

1. Auf zwei Seiten des Dreiecks konstruieren wir mit den entsprechenden Seitenlängen, gleichseitige Dreiecke.
2. Jedem dieser zwei Dreiecke umschreiben wir den entsprechenden Kreis.
3. Der Schnittpunkt der beiden Kreise ist der Punkt  $P$ , weil

$$\angle APC = \pi - \angle B' = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}.$$

Analoges gilt für den Winkel  $\angle BPC$ .

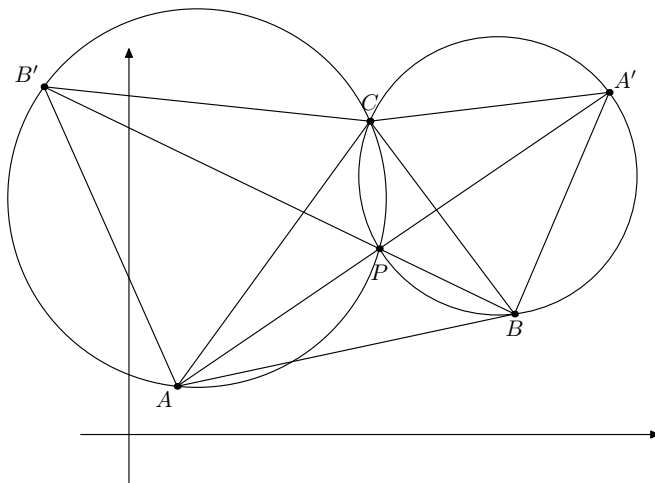


Abbildung 4: Geometrische Konstruktion des Punktes

## 9.6 Berechnung der Summe der Abstände

In diesem Paragraphen versuchen wir eine Berechnungsformel für die Summe der Abstände des Punktes von Fermat zu den Dreieckseckpunkten abzuleiten.

Laut Formel von Heron ist  $A(a, b, c) = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ , der Flächeninhalt eines Dreiecks mit den Seiten  $a, b, c$ , wobei  $2p = a + b + c$  ist. Wir betrachten die Abbildung

(4), in der

$$d = |BB'| = |PA| + |PB| + |PC|, \angle BAB' = \alpha + \frac{\pi}{3}, \text{ und } \triangle ACB' \text{ gleichseitig ist.} \quad (17)$$

Aus dem Kosinussatz für das Dreieck  $\triangle ABB'$  folgt

$$\begin{aligned} d^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) = b^2 + c^2 - 2bc \left(\cos\alpha \cos\frac{\pi}{3} + \sin\alpha \sin\frac{\pi}{3}\right) \\ &= b^2 + c^2 - bc(\cos\alpha + \sqrt{3}\sin\alpha). \end{aligned} \quad (18)$$

Im Dreieck  $\triangle ABC$  folgt aus dem Kosinussatz und Sinussatz

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \quad \frac{a}{\sin\alpha} = 2R, \quad R = \frac{abc}{4A(a, b, c)}. \quad (19)$$

Mit diesen Erkenntnissen wird (18) zu

$$d^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} + 2\sqrt{3}A(a, b, c). \quad (20)$$

## Literatur

- [1] H.S.M. Coxeter: Introduction to Geometry. John Wiley & Sons, Inc., New York, Chichester, Brisbane, 1989.
- [2] H. Dörrie: 100 Great Problems of Elementary Mathematics. Their History and Solutions. Dover Publications, Inc., New York, 1965.
- [3] G.M. Fichtenholz: Differential- und Integralrechnung I. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1989.