Die Zahl e

Diplomarbeit
zur
Erlangung des Magistergrades

an der
Formal- und Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Universität Wien

Eingereicht von
Stefan Schönhacker

Betreut von
Ao. Univ.-Prof. Dr. Gerhard Kowol

Wien, im Mai 2000

Our selfish lives have made us all go blind
one Day we´ll awake by a bright light on the Horizon
in one second every eye will see the same
and this blinding light will draw our Attention

[Apoptygma Berzerk: Eclipse]

For TMG

Inhaltsverzeichnis

0. Einleitung

»Kennen Sie die Formel von Napiers Konstante?«

»Ja. Wieso?«

Dialog Victor Kerber – Dana Scully
Akte X – Die unheimlichen Fälle des FBI
Folge 3X02 „Verschwörung des Schweigens“

Was hat Naturwissenschaft mit einer erfolgreichen Fernsehserie zu tun? Nun, im Falle von *Akte X*: einiges. Und so war 1995 auch *Napiers Konstante* in aller Munde, als die Zahlenreihe 2-7-1-8-2-8 zwei FBI-Agenten den Zutritt zu einem geheimen Archiv verschaffte. Aber was ist eigentlich Napiers Konstante?

Hätten die ÜbersetzerInnen etwas gründlicher gearbeitet, so wäre ihnen aufgefallen, dass Napiers Konstante im deutschen Sprachraum als *Eulersche Zahl* bekannt ist. Ihr Zahlenwert beträgt 2,71828... und sie ist (wie auch Special Agent Dana Scully in der oben genannten Folge von *Akte X* feststellt) die Basis der natürlichen Logarithmen.

Für die vorliegende Arbeit habe ich mir zum Ziel gesetzt, die Hintergründe der Entdeckung der natürlichen Logarithmen und, damit Hand in Hand gehend, der Eulerschen Zahl, von verschiedenen Seiten zu beleuchten und damit den LeserInnen eine möglichst umfassende Betrachtung dieses kleinen Ausschnittes der Mathematik zu bieten.

In einem historischen Überblick sollen die Motivationen für die Entstehung der Logarithmen genauso aufgezeigt werden wie die gedanklichen Schritte, die nötig waren, um die Besonderheiten und herausragenden Eigenschaften der natürlichen Logarithmen mit der Basis *e* zu erkennen.

Die angesprochenen Eigenschaften stellen eine weitere tragende Säule dieser Arbeit dar. Mathematisch fundiert erfährt man über die Transzendenz und Irrationalität der Eulerschen Zahl, über Exponentialfunktionen und schließlich auch den Logarithmus als deren Umkehrung. Schon in diesem Teil kommt der Praxisbezug nicht zu kurz, besprochen wird beispielsweise die logarithmische Spirale, die in Kunst und Natur häufig vorkommt.

Anwendungen stehen im Mittelpunkt des dritten Hauptteils. Sowohl der radioaktive Zerfall als auch die Messung von Reizen mittels Weber-Fechnerschem Gesetz finden hier Erwähnung, außerdem auch praktische Beispiele aus Elektrotechnik und Chemie.

Schließlich vollendet ein Schulbuchvergleich (über die betreffenden Kapitel der vier am häufigsten verwendeten Schulbücher der 6. Klasse AHS) die Gesamtkomposition. Als Anhang sind die ersten 10.000 Nachkommastellen der Eulerschen Zahl aufgeführt.

Wenn diese Arbeit mit dazu beitragen kann, dass immer mehr Menschen auf die Frage, „Kennen Sie die Eulersche Zahl?“ so überzeugt mit „Ja. Warum?“ antworten können wie Dana Scully, dann erfüllt sie ihren Zweck.

Danksagung

Die Fertigstellung dieser Arbeit bedeutet für mich den Abschluss eines wichtigen und spannenden Lebensabschnittes. Teils blicke ich bereits neugierig in die Zukunft, um herauszufinden, was sie für mich bereithält. Dabei möchte ich aber weder vergessen, im Jetzt zu verweilen und es auf mich wirken zu lassen, noch den Blick zurück zu wagen und Bilanz zu ziehen.

An dieser Stelle möchte ich mich stellvertretend bei einigen Menschen bedanken, die mich im Lauf der letzten Jahre begleitet haben. Es wäre ein Ding der Unmöglichkeit, alle FreundInnen und Bekannten zu nennen, die ich in dieser Zeit gewonnen habe. Daher bitte ich um Vergebung für alle Nicht-Nennungen!

Ein spezieller Dank gebührt (natürlich) meiner Familie: meinen Eltern, die mir nicht nur das Studium, sondern auch die Verwirklichung vieler anderer Ideen ermöglicht haben und meiner Persönlichkeit breiten Raum ließen; meiner Schwester Irene für jede Menge Spaß; meinem Bruder Martin für viele Tipps und Tricks.

Prof. Kowol gebührt mein Dank für die Betreuung meiner Diplomarbeit, seine Geduld mit mir, sein Verständnis für meine nicht-mathematischen Tätigkeiten und zahlreiche aufmunternde Worte.

In Vertretung für die vielen Bekannten und FreundInnen, die ich während des Studiums kennenlernen durfte, möchte ich Cordula Zwerenz danken, die seit nunmehr fast neun Jahren eine treue Begleiterin und Freundin ist, deren Ratschläge ich sehr schätze.

Mein Dank gilt auch den Kameraden der NÖ. Feuerwehren, insbesondere der Freiwilligen Feuerwehr Horn, für zahlreiche wertvolle Erfahrungen und sowohl unterhaltsame als auch ernste Erlebnisse.

Last, but not least soll hier die Internet Community erwähnt werden – auch im Netz konnte ich viele neue Bekanntschaften schließen. Ein besonderer Dank geht hier an *blu* für oftmaliges Zuhören und an *Akita* für die ersten 10000 Stellen der Eulerschen Zahl.

Alles Liebe!

1. Historische Entwicklung

Der Ausgangspunkt für die Entdeckung der Eulerschen Zahl und damit auch für zahlreiche weitere mathematische Entwicklungen ist in der Entstehung der Logarithmen zu suchen, der wir uns daher in der Betrachtung des historischen Ablaufes vorrangig zuwenden wollen.

1.1 Die Entstehung der Logarithmen

Im Europa des sechzehnten und siebzehnten Jahrhunderts kam es zu einer regelrechten „Rechen-Epidemie“. Selbst Viète[1], den manche für den größten Algebraiker des sechzehnten Jahrhunderts halten, verbrachte oft bis zu eineinhalb Tage mit Rechenaufgaben, die heute unproblematisch erscheinen. In diesen Zeiten versuchten auch die Astronomen, den Ort der Sterne immer genauer zu bestimmen, und legten dazu Tafeln der trignometrischen Funktionen an. Die Zahlen, mit denen gearbeitet wurde, nahmen immer größere Dimensionen an und das Rechnen mit ihnen wurde dementsprechend langwierig.

Sir John Napier[2] ersann ein Verfahren, mit dem man sparsamer und besser rechnen konnte. Seine *„Descriptio mirifici logarithmorum canonis“* (1614) enthielten die erste Logarithmentafel. Der große Gedanke des Schotten war es, jede Multiplikation durch eine Addition zu ersetzen – ihm war bewusst, wie sehr die zahlreichen Berechnungen dieser Zeit dadurch vereinfacht werden könnten. Betrachten wir vorerst, abseits der historischen Entwicklung, die mathematischen Zusammenhänge.

1.2 Addieren statt Multiplizieren

Betrachten wir ein einfaches Beispiel: $10^5 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$, $10^3 = 10 \cdot 10 \cdot 10$.

Die Multiplikation $10^5 \cdot 10^3$ kann also auch so geschrieben werden:

$(10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10) \cdot (10 \cdot 10 \cdot 10)$, was offensichtlich gleichbedeutend ist mit:

$10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^8$

Wir sehen also: $10^5 \cdot 10^3 = 10^{5+3} = 10^8$

Um zum Ergebnis zu kommen, genügt es also, die Exponenten zu addieren und den neuen Exponenten zu verwenden. Eine Multiplikation wurde auf diese Weise durch eine Addition ersetzt und dadurch, betrachtet man den Rechenaufwand, vereinfacht.

Mit den Potenzen von 10 ist es wohl nicht allzu schwer, die entsprechenden Rechnungen auch als Multiplikation durchzuführen. Anders sieht es aber schon bei den Potenzen von 2 aus. Auch hier kann man analog vorgehen. Etwa gilt:

$$256 \cdot 4 = 2^8 \cdot 2^2 = 2^{8+2} = 2^{10} = 1024$$

Stellt man sich nun eine Tabelle mit den entsprechenden Werten auf, so kann man die Resultate einfach ablesen. Eine solche einfache *Logarithmentabelle* für die Basis 2 könnte beispielsweise so aussehen wie unten angeschrieben.

2^1	2	2^{11}	2.048
2^2	4	2^{12}	4.096
2^3	8	2^{13}	8.192
2^4	16	2^{14}	16.384
2^5	32	2^{15}	32.768
2^6	64	2^{16}	65.536
2^7	128	2^{17}	131.072
2^8	256	2^{18}	262.144
2^9	512	2^{19}	524.288
2^{10}	1.024	2^{20}	1.048.576

Einfache Logarithmentabelle für die Basis 2

Man erkennt leicht, dass die obige Rechnung sich an Hand dieser Tabelle durch einfaches Ablesen durchführen lässt. Ebenso kann man offenbar mit allen anderen Beispielen verfahren, so lange es sich dabei um Potenzen von 2 handelt und das Ergebnis der Multiplikation nicht größer ist als in der Tabelle angeführt.

Natürlich möchte man diese Methode aber auf *alle* Zahlen ausdehnen, denn wer multipliziert schon nur Potenzen von 2 oder von 10? Wir brauchen also eine Methode, mit der wir auch andere Zahlen als Potenzen einer bestimmten Basis darstellen können, sodass das arbeitssparende Verfahren, das wir gerade kennengelernt haben, auch auf diese anwendbar ist.

Interessieren wir uns beispielsweise für die Darstellung der Zahl 3 als Potenz von 10, so stellen wir Folgendes fest:

$$10^{0,333...} = \sqrt[3]{10} = 2,15544... < 3 < 3,1623... = \sqrt{10} = 10^{0,5}$$

Anzunehmen ist also, dass gilt:

$$10^x = 3 \quad \text{wo} \quad 0,333... < x < 0,5$$

Für die meisten Rechnungen ist eine Näherung völlig ausreichend, es bietet sich etwa an:

$$10^{0,47712} = 2,99999...$$

Diesen Dezimalbruch (0,47712) nennen wir nun den *Logarithmus von 3* und schreiben dafür $\log 3$.

Allgemein ist der (dekadische) Logarithmus einer Zahl a durch die Beziehung $a = 10^{\log a}$ definiert. $\log a$ ist also diejenige Zahl, welche als Exponent von 10 genau die Zahl a liefert.

1.3 Auftreten der Eulerschen Zahl

Mehrere Mathematiker versuchten sich nun an Tabellen der beschriebenen Art. Der Schweizer Jost Bürgi[3] stellte bereits in den Jahren 1603-1610 eine Logarithmentafel nach folgendem Schema auf[4]:

0,0000	1,00000000
0,0001	1,00010000 = 1+1/10000
0,0002	1,00020001 = $(1{,}0001)^2$
...	...
0,0010	1,00100045 = $(1{,}0001)^{10}$
...	...
0,0100	1,01004966 = $(1{,}0001)^{100}$
...	...
1,0000	2,71814593 = $(1{,}0001)^{10000}$
...	...

Auszug aus einer von Bürgis Logarithmentabellen

Durch zahllose Multiplikationen füllte Bürgi auch die Lücken in dieser Tabelle, die hier nur durch Punkte angedeutet sind.

„Das sollen Logarithmen sein? Aber zu welcher Basis denn?“, ist man geneigt zu fragen. Allerdings genügt natürlich ein Blick auf die nebenstehende Tabelle, denn die Basis kann ja auch als jene Zahl verstanden werden, für die der Logarithmus gleich 1 ist. Dabei handelt es sich um 2,71814593.

Hätte es Bürgi nun noch genauer genommen und beispielsweise mit 1/1000000 gearbeitet statt mit 1/10000, so hätte er möglicherweise überrascht festgestellt, dass die neue Basis nur unwesentlich größer ist als die alte (genau gesagt beträgt die Basis für diesen Fall 2,71828047 und unterscheidet sich damit nur um 0,00014 von der vorigen).

Der Grund dafür liegt im Grenzwert-Verhalten des Ausdrucks $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, das wir später noch genauer betrachten werden (→ 2.1 Verschiedene Definitionen von e). Unabhängig davon, wie groß n gewählt wird, die Basis x bleibt immer unterhalb eines bestimmten Werts, ja sie nähert sich einem bestimmten Wert an: $x \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} e = 2{,}7182818...$

Das Logarithmensystem, das diesen Wert als Basis benutzt, scheint gegenüber allen anderen *ausgezeichnet* zu sein, daher wird es auch das System der *natürlichen Logarithmen* genannt (siehe [1], Seiten 256-257).

Die Bezeichnung e geht auf Euler zurück (erstmalige Verwendung in einem Manuskript von 1727; zum ersten Mal veröffentlicht 1736). Allerdings benannte er die Zahl e nicht nach sich selbst, sondern wählte als Kurzform für seine Entdeckung jenen Buchstaben des Alphabets, dem damals als erstem noch keine besondere mathematische Bedeutung zugewiesen war.

1.4 Die Rolle Eulers

Die Entwicklung der Logarithmen findet mit Euler bereits ihren Höhepunkt, denn Eulers Definition des Logarithmus entspricht der heute Üblichen:

Jene Zahl $z \in \mathbb{R}$, für die $a^z = y$ gilt, heißt *Logarithmus* von *y* zur Basis *a*. Es gilt:

$$z = \log_a y \Leftrightarrow a^z = y$$

Dabei muss $y \in \mathbb{R}^+$, $a \in \mathbb{R}^+$ und $a \neq 1$ vorausgesetzt werden.

Hinsichtlich *y* allerdings trifft Euler keine Beschränkungen. Er schreibt:

„*Die Logarithmen von Zahlen, die größer als 1 sind, sind positiv und hängen vom Wert der Basis a ab. So ist* $\log a = 1$, $\log a^2 = 2$, $\log a^3 = 3$, ...“ Hieraus wird ersichtlich, „*dass man stets die Zahl als Basis wählt, deren Logarithmus gleich 1 ist.*

Die Logarithmen der positiven Zahlen, die kleiner als 1 sind, sind negativ. So ist

$\log \frac{1}{a} = -1$, $\log \frac{1}{a^2} = -2$, $\log \frac{1}{a^3} = -3$ *usw.*“

Die Logarithmen negativer Zahlen, bemerkt er, sind zwar nicht reell, doch imaginär (siehe [23], Seite 27).

Im Zuge seiner Beschäftigung mit Logarithmen stellte Euler Überlegungen zur Reihendarstellung von *e* auf, die im folgenden Abschnitt nachvollzogen werden sollen (siehe [23], Seiten 27-29).

1.4.1 Zur Reihendarstellung

Es sei $a > 1$, w unendlich klein. Aus der Gleichung $a^0 = 1$ folgert Euler $a^w = 1 + y$, wobei y auch eine unendlich kleine Zahl ist. Abhängig von der Größe *a* ist y entweder gleich w, kleiner oder größer als dieses. Man kann somit, da man a nicht kennt, mit einer geeigneten Konstante $y = kw$ setzen und gelangt zu

$$a^w = 1 + kw \text{ und weiters zu } w = \log(1 + kw).$$

Durch ein Beispiel verdeutlicht Euler nun, dass die Zahl *k* tatsächlich von der Basis a abhängt.

Potenziert man die Gleichung $a^w = 1 + kw$ mit vorläufig beliebigem[5] j, erhält man $a^{jw} = (1 + kw)^j$. Mit Hilfe des *binomischen Satzes*[6] wird die rechte Seite entwickelt:

$$a^{jw} = 1 + \frac{j}{1}kw + \frac{j(j-1)}{1 \cdot 2}k^2w^2 + \frac{j(j-1)(j-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}k^3w^3 + \ldots$$

Setzt man nun $j = \frac{z}{w}$ mit vorläufig beliebigem endlichem *z*, so wird *j* unendlich groß, denn w ist ja laut Annahme unendlich klein.

Da $wj = z$ bzw. $w = \frac{z}{j}$ ist, geht die obige Gleichung über in

$$a^z = 1 + \frac{1}{1}kz + \frac{1(j-1)}{1 \cdot 2j}k^2 z^2 + \frac{1(j-1)(j-2)}{1 \cdot 2j \cdot 3j}k^3 z^3 + \frac{1(j-1)(j-2)(j-3)}{1 \cdot 2j \cdot 3j \cdot 4j}k^4 z^4 + \dots$$

Berücksichtigt man, dass j eine unendlich große Zahl ist, so wird $\frac{j-1}{j} = 1 - \frac{1}{j} = 1$, $\frac{j-2}{j} = 1 - \frac{2}{j} = 1$, usw. und entsprechend wird $\frac{j-1}{2j} = \frac{1}{2}$, $\frac{j-2}{3j} = \frac{1}{3}$ usw.

Somit lässt sich die obige Gleichung vereinfachen:

$$a^z = 1 + \frac{kz}{1} + \frac{k^2 z^2}{1 \cdot 2} + \frac{k^3 z^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{k^4 z^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots \quad [*]$$

Wählt man $z = 1$, wird der bereits zuvor angesprochene Zusammenhang von a und k offensichtlich, den Euler verdeutlichen wollte. Es wird

$$a = 1 + \frac{k}{1} + \frac{k^2}{1 \cdot 2} + \frac{k^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{k^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots \quad [**]$$

Um daraus k explizit auszudrücken, setzt Euler

$$a^z = a^{jw} = (1 + kw)^j = 1 + x \quad [***]$$

woraus sich $kw = (1+x)^{\frac{1}{j}} - 1$ und schließlich $jw = \frac{j}{k}\left[(1+x)^{\frac{1}{j}} - 1\right]$ ergibt.

Da $jw = \log_a(1+x)$ ist, wie aus [***] folgt, gilt: $\log_a(1+x) = \frac{j}{k}\left[(1+x)^{\frac{1}{j}} - 1\right]$.

Entwickelt man $(1+x)^{\frac{1}{j}}$ in eine Binomialreihe, so erhält man:

$$(1+x)^{\frac{1}{j}} = 1 + \frac{1}{j}x - \frac{1(j-1)}{j \cdot 2j}x^2 + \frac{1(j-1)(2j-1)}{j \cdot 2j \cdot 3j}x^3 - \frac{1(i-1)(2j-1)(3j-1)}{j \cdot 2j \cdot 3j \cdot 4j}x^4 + \dots$$

Somit ist

$$\log_a(1+x) = \frac{j}{k}\left[1 - 1 + \frac{1}{j}x - \frac{1(j-1)}{j \cdot 2j}x^2 + \frac{1(j-1)(2j-1)}{j \cdot 2j \cdot 3j}x^3 - \frac{1(j-1)(2j-1)(3j-1)}{j \cdot 2j \cdot 3j \cdot 4j}x^4 + \dots\right]$$

Wie schon oben gezeigt wurde, ist $\frac{j-1}{2j} = \frac{1}{2}$, $\frac{2j-1}{3j} = \frac{2}{3}$, $\frac{3j-1}{4j} = \frac{3}{4}$ usw.

Dies führt unter Verwendung von $jw = \log_a(1+x)$ zu:

$$\log_a(1+x) = \frac{1}{k}\left(\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots\right)$$

Und mit Hilfe jener Reihe kann man k aus a berechnen. Denn setzt man $1+x=a$, wählt also wieder $z=1$, so geht die Reihe wegen $\log_a(1+x)=\log_a a=1$ über in

$$1=\frac{1}{k}\left[\frac{a-1}{1}-\frac{(a-1)^2}{2}+\frac{(a-1)^3}{3}-\frac{(a-1)^4}{4}+\dots\right] \text{ bzw. in}$$

$$k=\frac{a-1}{1}-\frac{(a-1)^2}{2}+\frac{(a-1)^3}{3}-\frac{(a-1)^4}{4}+\dots$$

Bei $a=10$ erhält man den Wert $k=2{,}30258...$

Da man prinzipiell die Basis a beliebig wählen kann, kann man ebenso $k=1$ annehmen. Bei dieser Wahl folgt aus [**]:

$$a=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\dots=2{,}718...$$

Im Folgenden soll diese Zahl kurz mit e bezeichnet werden. Bekanntlich heißt sie heute EULERsche Zahl *e*.

Sie dient als Basis der „natürlichen“ oder „hyperbolischen“ Logarithmen, wobei die letztere Bezeichnung darauf zurückzuführen ist, dass die Quadratur der Hyperbel, $\int_a^b \frac{1}{x}dx$, durch solche Logarithmen bewältigt werden kann.

Nach [*] lautet die Reihe für e^z:

$$e^z=1+\frac{z}{1}+\frac{z^2}{1\cdot 2}+\frac{z^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{z^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\dots$$

Die Reihe für den natürlichen Logarithmus ($k=1$) ist:

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^6}{6}+\dots$$

Dabei sind natürlich noch Konvergenzüberlegungen nötig, die Euler jedoch nicht durchführt.

Ferner ist

$$\ln(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\frac{x^5}{5}-\frac{x^6}{6}-\dots$$

$$\Rightarrow \quad \ln(1+x)-\ln(1-x)=\ln\frac{1+x}{1-x}=\frac{2x}{1}+\frac{2x^3}{3}+\frac{2x^5}{5}+\frac{2x^7}{7}+\frac{2x^9}{9}+\dots$$

Diese Reihe ist sehr nützlich bei praktischen Berechnungen.

Setzt man, ausgehend von der Reihendarstellung für e^z, $a^y=e^z$, so ergibt sich $y\ln a=z\ln e$, also $y\ln a=z$. Durch Einsetzen erhält man:

$$a^y=1+\frac{y\ln a}{1}+\frac{y^2(\ln a)^2}{1\cdot 2}+\frac{y^3(\ln a)^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\dots$$

Man kann also eine beliebige Exponentialgröße mittels der natürlichen Logarithmen in eine unendliche Reihe entwickeln.

Abschließend gibt Euler die bedeutende Formel $e^z = \left(1 + \frac{z}{j}\right)^j$ (j ... unendlich groß) an[7], die sich in heutiger Schreibweise folgendermaßen darstellen lässt:

$$e^z = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n .$$

Die Irrationalität von e (und auch jene von e^2) wurde 1737 von Euler bewiesen (siehe [5], Seite 33).

1.4.2 Exkurs: Leonhard Euler

Am 15. April 1707 wurde Leonhard Euler in Basel als Kind von Paul Euler und dessen Frau Margarete Brucker geboren, ein Jahr bevor seine Eltern mit ihm nach Riehen übersiedelten, ein Dorf in 5km Entfernung, in dem sein Vater das (calvinistische) Priesteramt ausübte. Leonhard war das älteste von insgesamt sechs Kindern. Den Mathematikunterricht erhielt er von seinem Vater, der seinerseits während des Theologiestudiums in Basel Vorlesungen von Jakob Bernoulli besucht hatte, damals bereits ein berühmter Mathematiker.

Ab dem Alter von 13 Jahren studierte Leonhard an der Universität in Basel Philosophie und Recht, und bereits 1727 schloß er mit dem Magistertitel ab. Obwohl er sich, dem Wunsch des Vaters folgend, auf der theologischen Fakultät einschreiben ließ, galt seine Liebe mehr und mehr der Mathematik. Auch er hörte Vorlesungen von Bernoulli, allerdings nicht jene von Jakob Bernoulli wie sein Vater, sondern die von Johann Bernoulli, der dem inzwischen verstorbenen Jakob auf dessen Lehrstuhl gefolgt war.

Bernoulli, der Eulers Begabung erkannte, förderte ihn durch persönlichen Unterricht und durch Hinweise auf zusätzliche Literatur. Er erreichte schließlich auch, dass Eulers Vater die Zustimmung zum Abbruch von Leonhards Theologiestudium gab, sodass dieser sich völlig der Mathematik widmen konnte. Leonhard war fest im calvinistischen Glauben verankert; er hielt auch Familienandachten für den ganzen Haushalt, die meist mit einer Predigt endeten.

Eulers erste Abhandlung („*Constructio linearum isochronarum in medio quocumque resistente*“) erschien 1726. Bald darauf konnte er auch seine erste Stelle einnehmen, und zwar als Adjunkt an der Petersburger Akademie der Wissenschaften, damals unter Katharina I., die als wissenschaftsfreudig galt. Dass Nikolaus und Daniel, die Söhne von Bernoulli, dort als Professoren tätig waren, war dabei sicher eine große Hilfe. 1731 wurde Euler bereits Professor der Physik. Er folgte dann zwei Jahre später Daniel, der nach Basel zurückkehrte, als Professor der Mathematik nach.

1734 trat Leonhard in den Ehestand ein. Seine Frau, Katharina Gsell, war die Tochter eines Schweizer Malers, der in Petersburg ansässig war. Von den 13 gemeinsamen Kindern dieser Ehe verstarben acht bereits im Kleinkinderalter. Dem Paar blieben drei Söhne und zwei Töchter.

Die Hauptwerke seiner „ersten Petersburger Periode“ waren die zweibändige *Mechanik*, die *Musiktheorie* und die *Schiffstheorie* in zwei Bänden. Während dieser Schaffenszeit, die sich von 1727 bis 1741 einordnen lässt, büßte Euler in Folge einer Erkrankung die Sehkraft des rechten Auges ein. Angeblich war diese Erkrankung die Folge einer großen Überanstrengung, als er 1735 eine größere und schwierigere Berechnung innerhalb von drei Tagen bewältigte, für die einige Mathematiker mehrere Monate veranschlagt hatten.

Schließlich verließ Euler Russland, das politische Wirren durchlebte, um 1742, dem Ruf Friedrichs des Großen folgend, nach Berlin zu gehen, wo er für 25 Jahre bleiben sollte. Er wurde dort Direktor der Mathematischen Klasse an der neu gegründeten Berliner Akademie. Hier entstanden seine Hauptwerke zur *Variationsrechnung*, *Funktionentheorie*, *Differentialrechnung* und die „*zweite Mechanik*“. Auch von Berlin aus hielt er Kontakt mit den Kollegen in Petersburg.

Friedrich der Große, der Gründer der Akademie, meinte einst über Euler, *„es scheine, dass er, an lauter algebraischen Größen gewöhnt, die Kunst des gemeinen Rechnens verlernt habe.“*, und weiter: *„Ich, der ich keine Kurven berechnen kann, weiß doch, dass 16.000 Taler mehr sind als 13.000.“* Ganz falsch dürfte er damit nicht gelegen sein, denn es wird auch berichtet, *„Wenn die Welt nicht zu Eulers Analysis passte, dann lag für ihn der Fehler stets bei der Welt.“* (siehe [34], Seite 150)

Nach der Entspannung der politischen Situation in Russland unter Katharina II. kehrte Euler 1766 nach Petersburg zurück. Anlass dafür waren innere Probleme in Berlin. So meinte Friedrich der Große etwa, er sei froh, „*einen einäugigen durch einen zweiäugigen Geometer ersetzen zu können*“ (nämlich Euler durch Lagrange). Außerdem war Euler mit den praktischen Aufgaben nicht wirklich glücklich, die er in Berlin zu lösen hatte: so musste er etwa dem König Vorschläge für den Finow-Kanal unterbreiten und Wasserwerke und andere mechanische Konstruktionen bauen.

Schon bald nach dem Eintreffen in Sankt Petersburg allerdings führte eine neuerliche Erkrankung zu seiner völligen Erblindung. Durch die Hilfe seiner Umgebung (insbesondere seiner Söhne, allen voran Johann Albrecht, und seiner Mitarbeiter) und durch sein ausgezeichnetes Gedächtnis konnte Euler aber dennoch weiterarbeiten, und in dieser „Zweiten Petersburger Periode“ entstanden bedeutende Schriften wie die *Algebra* (1770) sowie Werke über *Integralrechnung* und *Dioptrik*. Beinahe gewinnt man den Eindruck, der Verlust des Augenlichts schärfte noch seinen inneren Blick für die Feinheiten der Mathematik.

Nach 40-jähriger Ehe verstarb Eulers Gattin Katharina 1773. Drei Jahre danach entschloss er sich, nochmals den Bund fürs Leben einzugehen. Er ehelichte Salomea Abigail Gsell, eine Halbschwester der Verstorbenen.

1783, im Alter von 76 Jahren, verstarb Leonhard Euler am 18. September in Sankt Petersburg an den Folgen eines Schlaganfalls. Er gilt zu Recht als der größte Mathematiker und Naturwissenschaftler überhaupt, den die Schweiz je hervorgebracht hat, sowie als der bedeutendste Zahlentheoretiker und Algebraiker des achtzehnten Jahrhunderts.

(Quellen: [1], [23], [33], [34], [35])

1.4.3 Eulers Hauptwerke

Euler ist der Begründer des modernen Lehrbuchs, das systematisch von den einfachen Grundlagen bis an die Front der Forschung führt. Er verfasste seine Abhandlungen so leicht, wie ein gewandter Stilist einen Brief an einen guten Freund schreibt.

Viele von Eulers mathematischen Bezeichnungen haben sich durchgesetzt, beispielsweise e für die Basis der natürlichen Logarithmen, i für die imaginäre Einheit, das Funktionssymbol $f(x)$ sowie die Zeichen Δ für die Differenz und Σ für die Summe.

Es kann hier nur ein Überblick über seine wichtigsten und bekanntesten Werke gegeben werden, denn Euler war (bisher) der produktivste Mathematiker überhaupt, und seine Arbeiten füllen nicht nur ganze Jahrgänge mancher Zeitschriften, es hat auch Jahrhunderte (!) gedauert, sein gesamtes Vermächtnis zu publizieren!

1736	Mechanica (zwei Bände)
1738/1740	Rechenkunst (zwei Bände)
1739	Tentamen novae theoriae musicae („Musiktheorie“)
1744	Theoria motuum planetarum et cometarum (“Himmelsmechanik”)
1745	Neue Grundsätze der Artillerie
1747	Rettung der göttlichen Offenbarung gegen die Einwürfe der Freigeister
1748	Introductio in analysin infinitorum („Einführung“, zwei Bände)
1749	Scientia navalis („Schiffstheorie“, zwei Bände)
1753	Oria motus lunae („Erste Mondtheorie“)
1755	Institutiones calculi differentialis („Differentialrechnung“, zwei Bände)
1762	Constructio lentium obiectivatum („Achromatische Linsen“)
1765	Theoria motus corporum („Zweite Mechanik“)
1766	Théorie générale de la dioptrique („Linsentheorie“)
1768	Lettres à une Princesse d´Allemagne („Philosophische Briefe“, zwei Bände)
1768	Institutiones calculi integralis („Integralrechnung“, drei Bände bis 1770)
1769	Dioptrica („Optik“, drei Bände bis 1771)
1770	Vollständige Anleitung zur Algebra („Algebra“, zwei Bände)
1772	Theoria motuum lunae („Zweite Mondtheorie”)
1773	Théorie complette de la construction et de la manoeuvre des vaisseaux („Zweite Schiffstheorie”)

2. e – mathematisch betrachtet

Die bisherigen Abschnitte haben einen Überblick darüber gegeben, auf welch verschlungenen Wegen die Entdeckung und Entwicklung der Eulerschen Zahl vor sich gegangen ist. Nun wollen wir die Eulersche Zahl, die, wie schon in der Einleitung erwähnt wurde, manchmal (ohne besonders guten Grund) auch als *Napiers Zahl* bezeichnet wird[8], nicht vom historischen, sondern vom mathematischen Standpunkt aus betrachten.

2.1 Verschiedene Definitionen von e

Als ersten Schritt wollen wir eine genaue Definition von e angeben. Die Literatur kennt einige verschiedene Definitionen, von denen die wichtigsten vorgestellt werden. Dass sie sinnvoll sind und stets dieselbe Zahl festlegen, wird ebenfalls gezeigt.

2.1.0.1 Limes

Die bekannteste und am häufigsten angeführte Definition ist jene über den Limes einer Folge:

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Sprich: e ist gleich dem Limes des Ausdrucks $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, wenn man die natürliche Zahl n gegen unendlich gehen lässt. Diese Form ist beispielsweise auch in der bekannten Encyclopaedia of Mathematics zu finden (siehe [3], Volume 3, Seite 338).

<u>Beweis</u>[9]:

Die Folge $u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ ist nach oben beschränkt für alle natürlichen n, denn:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+\binom{n}{1}\frac{1}{n}+\binom{n}{2}\frac{1}{n^2}+\ldots+\binom{n}{n}\frac{1}{n^n} \le 1+1+\frac{1}{2}+\ldots+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 1+\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} < 1+\frac{1}{\frac{1}{2}} = 3$$

Es existiert also $e := \sup u_n$, das heißt, es gibt zu jedem $\varepsilon > 0$ ein u_{n_0} mit $u_{n_0} > e-\varepsilon$.

Die Folge (u_n) wächst allerdings auch streng. Heuser [24] zeigt das beispielsweise wie folgt:

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \text{ für } m < n \quad (\text{wo } m, n \in \mathbb{N}), \text{ denn es gilt:}$$

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = 1+\binom{m}{1}\frac{1}{m}+\binom{m}{2}\frac{1}{m^2}+\ldots+\binom{m}{m}\frac{1}{m^m} <$$

$$< 1+\binom{n}{1}\frac{1}{n}+\binom{n}{2}\frac{1}{n^2}+\ldots+\binom{n}{m}\frac{1}{n^m}+\ldots+\binom{n}{n}\frac{1}{n^n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Die Ungleichung ist eine Folgerung aus:

$$\frac{1}{m^k}\cdot\binom{m}{k} < \frac{1}{n^k}\cdot\binom{n}{k} \text{ für } k = 2, \ldots, n$$

Der Beweis dieser Beziehung stellt kein großes Problem dar, denn:

$$\frac{1}{m^k}\cdot\binom{m}{k} = \frac{1}{m^k}\cdot\frac{m(m-1)\ldots(m-k+1)}{k!} = \frac{1}{k!}\cdot\left(1-\frac{1}{m}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{m}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{k-1}{m}\right) <$$

$$< \frac{1}{k!}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{k-1}{n}\right) = \frac{1}{n^k}\cdot\binom{n}{k}$$

Es gilt also obige Behauptung, und insbesondere:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \text{ für } n = 1, 2, \ldots$$

Somit ist erst recht $u_n > e - \boldsymbol{e}$ für alle $n > n_0$, und daher $|u_n - e| < \boldsymbol{e}$ für alle diese n.

Also kommen die Glieder der Folge (u_n) der wohldefinierten Zahl e tatsächlich beliebig nahe. ■

2.1.0.2 Intervallschachtelung

Das Mathematische Wörterbuch führt als erste Definition eine Intervallschachtelung an (siehe [2], Band I, Seite 403):

> *»Die Zahl e ist die durch die Intervallschachtelung* $\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n ; \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right)$ *erfasste reelle Zahl (* $n \geq 1$*, natürliche Zahl).«*

Ein Vorteil der Intervallschachtelung liegt sicher darin, dass der Begriff des Unendlichen darin nicht auftritt. Es ist nur von Relevanz, wie genau man e bestimmen möchte, sodann kann man die Zahl n passend wählen. So führt etwa $n = 1$ zum sehr unscharfen Intervall $(2, 4)$; $n = 100$ hingegen liefert mit dem Intervall $(2{,}70\ldots; 2{,}73\ldots)$ die gewünschte Zahl auf eine Nachkommastelle genau.

Zu zeigen bleibt noch, dass die Intervallschachtelung auch tatsächlich konvergiert.

Dazu gehen wir von folgenden zwei Bedingungen aus (siehe [11], Seiten 339-340):

1. $e > 1$

2. $x \to y = e^x \Rightarrow x \to y' = e^x$ (dieser Zusammenhang wird später bewiesen)

Wir können nun aus 1. folgern, dass $e^x < 1$ für $x < 0$ bzw. $e^x > 1$ für $x > 0$ gilt. Unter Berücksichtigung von 2. ergibt sich, dass die Steigung des Graphen für $x < 0$ (bzw. für $x > 0$) kleiner (bzw. größer) als eins sein muss, was bedeutet, dass der Graph überall (außer bei $x = 0$) oberhalb der Geraden $y = 1 + x$ verläuft:

$$e^x > 1 + x \text{ für } x \neq 0 .$$

Für natürliche *n* gelten insbesondere die folgenden Beziehungen:

$$e^{\frac{1}{n}} > 1 + \frac{1}{n} \quad \Rightarrow \quad e > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

$$e^{-\frac{1}{n+1}} > 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$$

Bilden wir nun den Kehrwert des zweiten Ausdrucks, so wird offensichtlich, warum der Nenner mit $n+1$ bezeichnet wurde:

$$e^{\frac{1}{n+1}} < \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n} \quad \Rightarrow \quad e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

Eine Zusammenfassung dieser beiden Beziehungen ergibt:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) \text{ für } n \in \mathbb{N}.$$

Durch Einsetzen von $n = 1$ erhalten wir $e < 4$, womit gezeigt ist, dass der Grenzwert endlich ist. Letztlich erhalten wir:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq e \leq \lim_{n\to\infty}\left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)\right] = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Hier können offenbar nur noch die Gleichheitszeichen gelten. ■

Dass die Intervallschachtelung denselben Wert festlegt wie die Definition über den Limes, erkennen wir durch die folgenden Ausführungen, in denen die durch die Intervalle festgelegte Zahl vorerst als x_1 bezeichnet wird (siehe [44]):

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq x_1 \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

$$1 \leq \frac{x_1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \leq 1+\frac{1}{n}$$

Dies zeigt: $\lim\limits_{n=1,2,3,\ldots} \frac{x_1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = 1$

Da der Zähler x_1 eine Konstante ist, folgt, dass

$$\lim_{n=1,2,3,\ldots} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

existiert und gleich x_1 ist. Also handelt es sich bei x_1 um die Eulersche Zahl *e*. ■

Anmerkung:

Für eine computerorientierte Betrachtung einiger Intervallschachtelungen von *e* siehe [25].

2.1.0.3 Unendliche Summe

Aus der oben genannten Definition über den Limes kommt man mit relativ einfachen Mitteln zu einer weiteren sehr bekannten Darstellung von *e* (siehe [19], Seite 32). Der Folgenterm $x \to \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ wird, dem binomischen Lehrsatz folgend, entwickelt und aufgelöst:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+1+\frac{1}{2!}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)+\ldots+\frac{1}{n!}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$

Es ist naheliegend anzunehmen, dass diese Reihe sich für sehr große n annähern lässt durch:

$$1+1+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}$$

Und dem ist auch tatsächlich so. Da der exakte Beweis etwas umfangreicher ist, sei er auf später verschoben (→ 2.1.1). Aufgrund dessen folgt:

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots$$

Die Darstellung ist leicht zu merken, hat allerdings auch ihre Nachteile. So kann etwa der Wert für $n = 100$ nicht nach einem so einfachen Schema wie bei der Intervallschachtelung berechnet werden. Das ist allerdings auch nicht nötig, denn bei $n = 4$ erhalten wir bereits den Wert 2,708... – und damit einen Wert von ähnlicher Genauigkeit wie bei $n = 100$ im Intervallschachtelungsverfahren! Mit obigem Ausdruck kann man den Wert von *e* also vorzüglich numerisch berechnen.

2.1.0.4 Basis der natürlichen Logarithmen

Eine weitere durchaus übliche Definition lautet: *»Unter e versteht man jene (sicher existente) reelle Zahl, für die* $\ln e = 1$ *ist«* (siehe zum Beispiel [9], Seite 326).

Inhaltlich ist diese Aussage natürlich korrekt; persönlich halte ich sie deshalb nicht wirklich für sinnvoll, weil man in der Schule üblicherweise den *logarithmus naturalis* ähnlich definiert (als jenen Logarithmus, dessen Basis e ist). Ich sehe daher die Gefahr, dass mehrere Dinge zyklisch durch sich selbst erklärt werden. Selbst wenn das nicht passieren sollte, so sind die vorher angeführten, vom Logarithmus-Begriff unabhängigen Definitionen meines Erachtens besser für den Unterricht geeignet, da sie nicht angetan sind, auf diese oder ähnliche Art Verwirrung zu stiften.

2.1.0.5 Ein kurzer Blick in einige Schulbücher

Taschner (siehe [4]) arbeitet bei seinem neuen Zugang zum Thema mit dem Limes, wie wir später noch sehen werden (→ 4. Didaktische Betrachtung).

Ebenfalls über den Limes argumentiert Reichel (siehe [6], Seite 214). Das „Definitions-Kästchen" enthält dort noch einen weiteren Satz:

»Die Zahl $e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2{,}718281828459045\ldots$ *heißt EULERsche Zahl. Sie gibt an, auf das Wievielfache ein Kapital bei einem jährlichen Zinssatz von 100% bei stetiger Verzinsung in einem Jahr anwächst.«*

Hier gilt es darauf zu achten, dass die SchülerInnen nicht dem Irrglauben erliegen, der Zahlenwert einer Naturkonstante wäre festgelegt durch die Definition (man erinnere sich an den skurrilen und glücklicherweise gescheiterten Versuch eines US-Bundesstaates, den Zahlenwert von ð per Gesetz [!!] mit 3,1 festzulegen). Auch die Aussage, dass diese Zahl angibt, wie stark das Kapital anwächst, ist zwar korrekt, kann aber kaum Teil der Definition sein – man möchte die Verwendung von *e* nicht auf diese eine Anwendung beschränken.

So weit nur ein erster Vorgeschmack; ein tiefer gehender Blick in die Schulbücher erfolgt in späteren Kapiteln (→ 4. Didaktische Betrachtung).

2.1.1 Existenz von e bei der Definition als unendliche Summe

Im letzten Abschnitt blieb das Ergebnis unbewiesen, dass e als unendliche Summe $\sum \frac{1}{n!}$ eingeführt werden kann. Der <u>Beweis</u> wird nun nachgeholt[10].

Zuerst zeige man, dass die Folge

$$S_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

für $n = 1, 2, 3, \ldots$ gegen einen Grenzwert strebt, falls *n* beliebig wächst.

Wie wir sofort bemerken, wird die obige Summe mit jedem zusätzlichen Glied größer. Es gilt also offenbar: $S_n < S_{n+1}$ für alle *n*.

Ab $n = 3$ gilt weiters: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n > 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2 = 2^{n-1}$

sowie als Folgerung: $S_n < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}$ $(n = 3, 4, \ldots)$

Die Glieder der eben genannten Summe, ausgenommen die erste 1, bilden eine geometrische Reihe mit dem Quotienten ½. Diese Summe berechnen wir mittels bekannter Formel:

$$\sum S_n = 1 + \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = 1 + 2\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$$

und damit gilt jedenfalls: $\sum S_n < 1 + 2 = 3$.

Damit haben wir gleichzeitig auch die Beschränktheit der Folge S_n gezeigt, da ja ihre Werte keinesfalls größer als 3 werden können.

Nun strebt aber, wie wir aus der Analysis wissen, jede Folge, die beschränkt und monoton wachsend ist, gegen einen Grenzwert. Also konvergiert auch die eben behandelte Folge gegen einen Grenzwert *S*, und wir wissen inzwischen sogar, dass dieser zwischen 2 und 3 liegt.

Betrachten wir nun wieder die Folge, der unser eigentliches Interesse gilt, nämlich

$$T_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n \cdot (n-1)}{2!} \cdot \frac{1}{n^2} + \cdots + \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 1}{n!} \cdot \frac{1}{n^n} =$$

$$1 + 1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{1}{2!} + \cdots + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{n-1}{n}\right) \cdot \frac{1}{n!}$$

Offenbar gilt: $T_n \le S_n$, bzw. gilt ab $n = 2$ sogar: $T_n < S_n$, da die Werte jedes Klammerpaares kleiner als 1 sind. Da S_n nach oben beschränkt ist, ist T_n also erst recht nach oben beschränkt. Ersetzt man allerdings *n* durch $(n+1)$, so werden die Werte größer, das heißt, auch T_n wächst monoton, woraus wiederum folgt:

T_n konvergiert für $n \to \infty$ ebenfalls gegen einen Grenzwert *T*.

Nun bleibt noch zu zeigen, dass gilt: $S = T$.

Anschaulich klar ist, dass gilt: $S \ge T$, denn es sind ja die $S_n \ge T_n$ für alle *n*.

Sei nun $m < n$ eine feste ganze Zahl, und betrachten wir die ersten $m + 1$ Glieder von T_n:

$$1 + 1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{1}{2!} + \ldots + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{m-1}{n}\right) \cdot \frac{1}{m!}$$

Diese Summe ist kleiner als T_n, da ja $m < n$ ist. Halten wir nun *m* fest und lassen *n* über alle Schranken wachsen, so strebt die Summe gegen S_m, während T_n gegen *T* geht. Demnach ist $S_m \le T$ und daher $S \le T$.

Zusammen mit $S \geq T$ folgt daraus: $S = T$.

Der Grenzwert $S = T$ ist natürlich die Zahl e. ■

2.1.2 Annäherung: schnell oder langsam?

Die verschiedenen Darstellungen von e nähern sich dem exakten Wert unterschiedlich rasch an. Bei der Auswahl einer bestimmten Berechnungsart kommt es also nicht nur darauf an, eine möglichst praktikable Wahl zu treffen, sondern auch eine, die rasch konvergiert. Hier können Kompromisse nötig sein.

Die Annäherung bei der oben angegebenen Intervallschachtelung beispielsweise erfolgt sehr langsam, was in der Differenz der Folgenglieder, d_n, begründet liegt, die ja für die Genauigkeit verantwortlich ist. Soll nämlich dieses d_n zum Beispiel kleiner als 10^{-10} werden, dann gilt (siehe [25]):

$$2 \cdot \frac{1}{n} \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{n} < 10^{-10} \quad \Rightarrow \quad n > 2 \cdot 10^{10}$$

beziehungsweise allgemein:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{n} < \boldsymbol{e} \quad \Rightarrow \quad n > \frac{2}{\boldsymbol{e}}$$

n muss also ziemlich große Werte annehmen, damit mittels Intervallschachtelung eine akzeptable Näherung an den tatsächlichen Wert von e erreicht wird.

Die schnellste Annäherung bietet die unendliche Summe, $e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$. Es ist anschaulich klar, dass die Anteile, die hier mit wachsendem n hinzukommen, sehr rasch immer kleiner werden, dass also umgekehrt die bereits berechnete Summe schon sehr nahe am wirklichen Wert von e liegen muss.

2.1.3 Exkurs: Kettenbruchentwicklung

Eine sehr interessante Möglichkeit der Darstellung von e, mit der sich auch schon Euler selbst befasst hat, bieten die *Kettenbrüche*[11].

Man kann e zum Beispiel in einen Kettenbruch entwickeln, indem man den Kehrwert der e^{-1}-Reihe sukzessive in einen Kettenbruch umformt (siehe [12]). Dabei ist e^{-1} aufgrund der Reihendarstellung $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ gleich $e^{-1} = \sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{n!}$ (nähere Informationen über die Funktion $f(x) = e^x$ folgen in Abschnitt 2.4).

Man addiert und subtrahiert dann eine ganze Zahl so, dass die ersten beiden Glieder der jeweils im Zähler stehenden Potenzreihe verschwinden. Hier ein Beispiel für eine solche Entwicklung:

$$e = 2 + \frac{1}{\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + - \cdots} - 2$$

$$= 2 + \frac{\frac{2}{3!} - \frac{2}{4!} + \frac{2}{5!} - + \cdots}{\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - + \cdots} = 2 + \frac{2}{\frac{\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + - \cdots}{\frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} - + \cdots}}$$

Da $\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} = \frac{2}{3!}$ ist, muss jetzt 2 addiert und subtrahiert werden.

$$e = 2 + \frac{2}{2 + \frac{\frac{3}{4!} - \frac{3}{5!} + \frac{3}{6!} - + \cdots}{\frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} - + \cdots}} = 2 + \frac{2}{2 + \frac{3}{\frac{\frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} - + \cdots}{\frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} - + \cdots}}}$$

Wegen $\frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} = \frac{3}{4!}$ muss jetzt 3 addiert und subtrahiert werden. Man erhält so die zuerst von Euler angegebene Kettenbruchdarstellung:

$$e = 2 + \frac{2}{2 + \frac{3}{3 + \frac{4}{4 + \frac{5}{\ddots}}}}$$

mit den Näherungsbrüchen $2,\ 2\frac{2}{2},\ 2\frac{6}{9},\ 2\frac{32}{44},\ 2\frac{190}{265}, \ldots,$

wobei die Zähler und Nenner der Näherungsbrüche nach den Rekursivformeln

$P_n = n(P_{n-1} + P_{n-2})$ bzw. $Q_n = n(Q_{n-1} + Q_{n-2})$ berechnet werden können.

Da die Näherungsbrüche dieses Kettenbruchs keine monotone Folge bilden, kann dieser der monoton wachsenden Folge von Näherungsbrüchen, die sich aus der Summen- oder Limesdarstellung ergeben, nicht äquivalent sein.

Die Annäherung durch Kettenbrüche erfolgt offensichtlich sehr rasch (im obigen Beispiel erhält man folgende Ergebnisse für die ersten fünf Näherungsbrüche: 2, 3, 2,333..., 2,727..., 2,717...), da Korrekturen der Werte jeweils nur noch in jenen Bereichen des Kettenbruches stattfinden, die deutlich geringere Auswirkungen auf das Gesamtergebnis haben.

Eine andere, sehr rasch konvergierende Kettenbruchentwicklung für e erhält man aus der Kettenbruchentwicklung $x\coth x = 1+\cfrac{x^2}{3+\cfrac{x^2}{5+\cfrac{x^2}{7+\ddots}}}$ für $x\coth x$, die für alle $x\in\mathbb{R}$ gültig ist:

$$x(\coth x - 1) = (1-x) + \cfrac{x^2}{3+\cfrac{x^2}{5+\cfrac{x^2}{\ddots}}}$$

Da $\coth x - 1 = \frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1} - 1 = \frac{2}{e^{2x}-1}$ ist, ergibt sich schließlich:

$$\frac{2x}{e^{2x}-1} = (1-x) + \cfrac{x^2}{3+\cfrac{x^2}{5+\cfrac{x^2}{7+\cfrac{x^2}{\ddots}}}}$$

Daraus erhält man für $x=\frac{1}{2}$:

$$\frac{1}{e-1} = \frac{1}{2} + \cfrac{\frac{1}{4}}{3+\cfrac{\frac{1}{4}}{5+\ddots}}$$

und nach Multiplikation mit 2 und anschließendem gliedweisem Erweitern des Kettenbruchs:

$$\frac{2}{e-1} = 1+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{10+\cfrac{1}{14+\ddots}}} \quad \text{bzw.} \quad e = 1+\cfrac{2}{1+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{10+\ddots}}} = 1+\cfrac{4}{2+\cfrac{4}{12+\cfrac{4}{20+\cfrac{4}{28+\ddots}}}}$$

Für die Näherungsbrüche $\frac{P_n}{Q_n}$ dieser Entwicklung gelten ähnliche Rekursivformeln wie oben. Die Näherungswerte bis zum fünften Teilnenner sind:

$$\frac{3}{1}, \frac{19}{7}, \frac{193}{71}, \frac{2721}{1001}, \frac{2721\cdot 18+193}{1001\cdot 18+71} = \frac{49171}{18089}$$

Angeschrieben bis zur ersten vom richtigen Wert abweichenden Stelle lauten sie:

3,0; 2,714; 2,7183; 2,7182817; 2,7182818287; ...

Sie lassen also ebenfalls sehr gute Konvergenz erkennen.

Die Literatur hält zahlreiche weitere Kettenbruch-Entwicklungen für *e* bereit[12]. Besondere Erwähnung verdient wohl der *regelmäßige Kettenbruch*, der ebenfalls bereits Euler bekannt war:

$$e = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\ddots}}}}}}}$$

Eine übliche Kurzschreibweise für einen Kettenbruch der Form

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_N}}}}}$$

lautet: $[a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_N]$. Die einzelnen Ausdrücke nennen wir die *Teilquotienten* oder einfach die *Quotienten des Kettenbruchs* (siehe zum Beispiel [28], Seite 129). In dieser Schreibweise lässt sich die Regelmäßigkeit, die hinter dem *regelmäßigen Kettenbruch* für e steckt, besonders schön erkennen:

$$[2, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, \ldots]$$

2.2 Die Irrationalität von e

Eine interessante Eigenschaft der Eulerschen Zahl ist ihre *Irrationalität*. Dazu sollen zuerst einige Hintergrund-Informationen angeführt bzw. erläutert werden:

Auch in der Antike waren bereits *irrationale Zahlen* bekannt, und zwar als Beschreibung von Längen, die mit der Einheitslänge inkommensurabel sind, wie etwa Seite und Diagonale eines Quadrats.

Der heutige Begriff der *Irrationalität* ist natürlich nicht nur auf die Geometrie beschränkt. Allgemein kann man sagen: irrational ist eine Zahl, wenn sie nicht rational ist. Man kann diese Eigenschaft an der Dezimalbruchdarstellung ablesen: unter den reellen Zahlen, die sich ja bekanntlich stets in einen Dezimalbruch entwickeln lassen, sind die irrationalen Zahlen (und nur diese!) genau diejenigen, die als nicht-periodische Dezimalbrüche geschrieben werden können.

Überraschen mag, dass eine irrationale Zahl eigentlich nichts Außergewöhnliches ist. Im Gegenteil stellt diese Eigenschaft eher den Alltag dar[13]. So gibt es etwa zwischen zwei beliebigen Zahlen nicht nur immer eine rationale, sondern auch eine irrationale Zahl. Im Gegensatz zur Menge der rationalen Zahlen ist die Menge der irrationalen Zahlen überabzählbar (siehe [3], Volume 5, Seite 189).

Die bisher angegebenen Anfangswerte der Dezimalbruchentwicklung von *e* lassen die Frage offen, ob *e* eine rationale oder irrationale Zahl ist. Doch kann man an den angegebenen Kettenbruchentwicklungen erkennen, dass *e* irrational ist, da rationale Zahlen stets abbrechende derartige Entwicklungen besitzen. Wir wollen jedoch auch einen direkten Beweis für diese Eigenschaft von *e* angeben, der in der Durchführung selbst für interessierte SchülerInnen keine allzu großen Schwierigkeiten bereiten sollte ([5], Seite 192, unter Hinweis auf [13], Seite 227):

Die Beweisführung erfolgt indirekt, das heißt, wir gehen davon aus, dass *e nicht* irrational sei, und leiten daraus einen Widerspruch her.

Sei also *e* eine rationale Zahl $e = \frac{p}{q}$, wo *p* eine ganze und *q* eine natürliche Zahl ist.

Wir wissen, dass $2 < e < 3$. Daher gilt auch $q \neq 1$, bzw. $q \geq 2$.

Ausgehend von der Gleichung

$$\frac{p}{q} = e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots$$

erhalten wir durch Multiplikation mit $q! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot q$ folgende Ergebnisse:

linke Seite: $e \cdot q! = \left(\frac{p}{q}\right) \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot q = p \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (q-1)$

und somit (als Produkt ganzer Zahlen) offensichtlich eine ganze Zahl.

rechte Seite:

$$[q! + q! + 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot q + 4 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot q + \ldots + (q-1) \cdot q + q + 1] + \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1) \cdot (q+2)} + \cdots$$

Innerhalb der eckigen Klammern steht ebenfalls eine ganze Zahl, allerdings stellen die verbliebenen Terme keine ganzen Zahlen dar. Wäre die Gleichung korrekt, müsste also die Summe der Terme außerhalb der eckigen Klammern ebenfalls eine ganze Zahl darstellen.

Wie wir wissen, ist $q \geq 2$, daher gilt auch:

$$\frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1) \cdot (q+2)} + \cdots \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots < \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{3}\right)} = \frac{1}{2}$$

(unter Verwendung der Summenformel für die unendliche Reihe).

Die restlichen Terme der rechten Seite sind also offensichtlich größer als 0, aber auch kleiner als ½ und stellen daher mit Sicherheit *keine* ganze Zahl dar.

Die Annahme, *e* wäre rational, wurde dadurch auf einen Widerspruch zurückgeführt und auf diese Weise die Irrationalität bewiesen. ■

2.3 Die Transzendenz von e

Bezüglich der feineren Unterteilung der irrationalen Zahlen in algebraische und transzendente Zahlen zeigt sich, dass *e* zu den letzteren zählt. Hier sollen nur die Begriffe geklärt werden, da ein Beweis für diese Arbeit zu umfangreich ist.

Eine reelle Zahl heißt *algebraisch*, wenn sie Lösung einer Gleichung der Form $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n = 0$ $(a_i \in \mathbb{Z})$ ist.

(Wären die obigen Koeffizienten $a_i \in \mathbb{Q}$ anstatt aus $\mathbb{Z}$, so würde Multiplizieren mit dem Hauptnenner der a_i wiederum zu einer Gleichung mit ganzzahligen Koeffizienten wie oben führen, ohne die Lösungen zu beeinflussen.)

Als Beispiel: die Zahl $\sqrt[3]{2}$ ist algebraisch, da sie Lösung der Gleichung $x^3 - 2 = 0$ ist.

Algebraisch sind z.B. auch Zahlen wie $\sqrt[m]{3} + \sqrt[n]{5}$, $\sqrt[m]{3 + \sqrt[n]{5}}$, $\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$, ...

Der Begriff der algebraischen Zahl führt zur Menge $\mathbb{A}$ aller reellen algebraischen Zahlen. Es gilt: $\mathbb{Q} \subset \mathbb{A} \subseteq \mathbb{R}$. Die erstere Beziehung gilt, weil jede rationale Zahl Lösung der Gleichung $qx - p = 0$ ist.

Es ist aber nicht *jede* reelle Zahl algebraisch. Denn schon Cantor hat gezeigt: die Menge $\mathbb{A}$ ist abzählbar. Da $\mathbb{R}$ aber im Gegensatz dazu überabzählbar ist, muss es offenbar reelle Zahlen geben, die nicht algebraisch sind.

Diese heißen *transzendent*. Das Cantorsche Argument liefert unmittelbar das Ergebnis, dass die Menge $\mathbb{T}$ dieser sogenannten transzendenten Zahlen überabzählbar ist; genauer: $\mathbb{R}$ und $\mathbb{T}$ sind gleichmächtig (siehe [14], Seite 325).

Der Nachweis der Existenz und auch die Konstruktion von transzendenten Zahlen gehen auf J. Liouville[14] zurück (siehe [3], Volume 9, Seite 237). Andere Zahlen, die die Transzendenz (und damit natürlich auch die Irrationalität) zu ihren Eigenschaften zählen können, sind etwa $\boldsymbol{p}$, e^p und $2^{\sqrt{2}}$ (siehe [3], Volume 5, Seite 189 sowie [14]).

Die Transzendenz von *e* wurde bereits Mitte des 18. Jahrhunderts vermutet (siehe [3], Volume 9, Seite 237), den Nachweis lieferte Charles Hermite[15] allerdings erst 1873 (siehe [2]). Der Beweis hierfür ist sehr viel schwieriger als jener für die Irrationalität. Er wird auch indirekt geführt und verwendet wieder die Summendarstellung. Er führt, ähnlich wie der Beweis der Irrationalität, auf eine Gleichheit von Zahlen, wo die eine Seite ganzzahlig, die andere aber nicht ganzzahlig ist. Für eine ausführliche Abhandlung seien die LeserInnen auf die Literatur verwiesen (siehe [28], Seiten 170-173, sowie [29], Seite 4).

Erwähnung soll hier noch ein Satz von F. Lindemann[16] finden, der allgemein besagt: Es kann keine Gleichung der Gestalt

$$\boldsymbol{b}_1 e^{a_1} + \ldots + \boldsymbol{b}_r e^{a_r} = 0$$

geben, wenn die $\boldsymbol{a}_i$ verschiedene, die $\boldsymbol{b}_i$ beliebige (nur nicht sämtlich verschwindende) algebraische Zahlen sind.

Wählt man $r = 2$, $\alpha_1 = i\pi$, $\alpha_2 = 0$, so gibt es eine Beziehung obiger Gestalt, nämlich die Eulersche Formel $e^{i\pi} + 1 = 0$ – einer der interessantesten Zusammenhänge der Mathematik überhaupt, mit dem wir uns später noch befassen wollen. Das entspricht der Wahl $\beta_1 = \beta_2 = 1$. Aufgrund des Satzes von Lindemann können nicht alle Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ algebraisch sein. Also muss $i\pi$ und daher auch π transzendent sein.

Auch die Transzendenz von *e* kann man aus dem genannten Satz ableiten, denn wählt man $r = 2$ und $\beta_1 = -1$, $\beta_2 = \beta$, $\alpha_1 = \alpha(\neq 0)$, $\alpha_2 = 0$, so kann es keine Gleichung der Gestalt $e^{\alpha} = \beta$ mit algebraischem $\alpha, \beta, \alpha \neq 0$ geben. Hier wird mehr bewiesen als die bloße Transzendenz von *e*, denn gezeigt wird, dass sogar e^{α} stets transzendent ist, solange $\alpha \neq 0$ eine beliebige algebraische Zahl ist (siehe [47]).

Nach wie vor gibt die Transzendenz von Zahlen den MathematikerInnen viele Rätsel auf, und auch scheinbar einfache Fragen wie beispielsweise jene nach der Transzendenz von $e \cdot \pi$ oder $e + \pi$ sind bis heute unbeantwortet. Bekannt ist hingegen, dass e^{π} transzendent ist.

2.4 f(x)=e^x

Nach der Betrachtung der Zahl *e* selbst wollen wir uns nun mit einer häufig auftretenden Funktion auseinandersetzen, in der *e* eine Schlüsselrolle spielt. Der Gedanke, der zu dieser Funktion führte, kann beispielhaft durch das folgende Zitat erklärt werden (siehe [1], Seite 486):

»Jakob Bernoulli[17]*, ein Schweizer Mathematiker des 17. Jahrhunderts, [...] stellte sich gelegentlich folgendes Problem: Nach welchem Gesetz wächst ein auf Zinseszinsen liegendes Kapital, wenn die Zinsen in jedem Augenblick zum Kapital geschlagen werden, wenn sie also nicht erst bis zum Jahresende warten müssen, sondern sogleich, schon im Augenblick ihrer Geburt, mit ihrer Arbeit beginnen und ihrerseits Zinsen tragen?«*

Wie schon früher erwähnt, stößt man durch diese Problemstellung auf die Funktion $x \to y = e^x$, die wir nun näher betrachten wollen.

Die Funktion $x \to y = e^x$, manchmal auch $y = \exp x$ bezeichnet, die so genannte *Exponentialfunktion*, ist nicht nur ein wichtiges Hilfsmittel zur Beschreibung von Vorgängen in der Natur (wie wir später noch sehen werden: → Praktische Anwendung), sondern auch eine der wichtigsten Funktionen der Analysis. Die Funktion ist für beliebiges *x* definiert wie folgt (siehe [3], Volume 3, Seite 444):

$$e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

Durch einige einfache Rechenschritte (Anwendung des Binomischen Lehrsatzes) kann die Funktion auch in eine Potenzreihe umgewandelt werden (siehe [19], Seiten 30-31) [18]:

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = 1 + n\cdot\left(\frac{x}{n}\right) + \frac{n\cdot(n-1)}{2!}\cdot\left(\frac{x}{n}\right)^2 + \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{3!}\cdot\left(\frac{x}{n}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{x}{n}\right)^n$$

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = 1 + x + \frac{x^2}{2!}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{x^3}{3!}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right) + \cdots + \frac{x^n}{n^n}$$

Es liegt nahe zu vermuten, dass diese Reihe durch $1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}$ angenähert werden kann. Zur Untersuchung dieser einfacheren Reihe dient uns folgender

<u>Satz</u>: Für jedes $x \in \mathbb{R}$ existiert $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!} = \sum\limits_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} =: e^x$.

Der <u>Beweis</u> verläuft in zwei Teilen:

1) $x > 0$:

Zu jedem $x > 0$ und $\varepsilon > 0$ gibt es eine natürliche Zahl n_0, sodass für $n > n_0$ gilt:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{x}{n+1} < \varepsilon \quad \text{mit} \quad a_i := \frac{x^i}{i!}$$

Man muss also bloß $n_0 > \frac{x}{\varepsilon} + 1$ wählen. Da somit $a_{n+1} < \varepsilon \cdot a_n$ ist, folgt für $n > n_0$

$$\frac{a_{n+1}}{\varepsilon^{n+1}} < \frac{a_n}{\varepsilon^n} < \ldots < \frac{a_{n_0+1}}{\varepsilon^{n_0+1}} =: q$$

wobei q positiv ist. Für alle $n > n_0$ ist also $a_n < q\varepsilon^n$. Die Summe $\sum q\varepsilon^i$ ist für $0 < \varepsilon < 1$ als geometrische Reihe konvergent und somit als Folge der Partialsummen beschränkt. Daher ist die wegen $x > 0$ monotone Folge der Partialsummen zu $\sum a_i$ ebenfalls beschränkt und damit konvergent.

2) $x \le 0$:

Für $x = 0$ ist die Behauptung trivial. Für $x < 0$ konvergiert nach Punkt 1) die Reihe der Absolutbeträge $\sum |a_i|$, woraus leicht auf die Konvergenz von $\sum a_i$ geschlossen werden kann. Der Beweis ist am leichtesten mit Hilfe des Cauchyschen Konvergenzkriteriums unter Benutzung der Dreiecksungleichung zu führen[19].

Nun präzisieren wir unsere Vermutung über die Annäherung der beiden oben genannten Reihen, indem wir zeigen, dass für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

existiert und gleich e^x ist. Dies formulieren wir in folgendem

<u>Satz</u>: Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \left(e^x - \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \right) = 0$$

Beweis:

Nach dem Cauchyschen Konvergenzkriterium gibt es zu festem x und zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $k \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^{k+i}}{(k+i)!} < \frac{\varepsilon}{2}$$

Für festes x und k und $n > k$ werden die i-ten Summanden, $i = 0, 1, 2, \ldots, k$, der beiden obigen Reihen voneinander subtrahiert. Dann erhält man unter Benutzung der Dreiecksungleichung:

$$\left| e^x - \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \right| \le$$

$$\le \left[\frac{|x^2|}{2!} \cdot \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)\right) + \frac{|x^3|}{3!} \cdot \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right)\right) + \ldots + \frac{|x^k|}{k!} \cdot \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)\right) \right] +$$

$$+ R(n, k, x)$$

mit einem positiven Rest $R(n, k, x)$. Die Koeffizienten der $|x^i|$ in der eckigen Klammer durchlaufen mit $n \to \infty$ Nullfolgen, daher wird der Inhalt dieser eckigen Klammer für hinreichend großes n kleiner als $\frac{\varepsilon}{2}$. Für den Rest gilt:

$$R(n, k, x) < \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|x^{k+i}|}{(k+i)!} < \frac{\varepsilon}{2}$$

da die Koeffizienten der x^i in der Reihenentwicklung positiv und nicht größer als $\frac{1}{i!}$ sind. Damit gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine natürliche Zahl n_0, sodass für $n > n_0$ gilt:

$$\left| e^x - \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \blacksquare$$

Einen davon etwas abweichenden Beweis bietet [20].

Die Reihe $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$ konvergiert also für alle reellen Werte von x, und zwar sehr schnell aufgrund der rasch anwachsenden Nenner. Üblicherweise gewinnt man die numerischen Werte von e^x aus dieser Reihe, da die ersten paar Glieder bereits hohe Genauigkeit liefern (siehe [5], Seite 152).

2.4.1 Allgemeine Exponentialfunktion

Es sei darauf hingewiesen, dass der Ausdruck *Exponentialfunktion* in der mathematischen Analysis auch für die *allgemeine Exponentialfunktion* verwendet wird, also für die Funktion $y = a^x$, mit reellem x und $a > 0, a \neq 1$. Diese Funktion steht mit der Exponentialfunktion, wie wir sie meinen, in folgendem Zusammenhang: $a^x = e^{x \ln a}$. Diese Beziehung folgt direkt aus der Definition des Logarithmus, bzw. wird sie sogar oft als Definition der allgemeinen Exponentialfunktion angeführt.

Dieser Zusammenhang wird uns später noch beschäftigen.

Einige Besonderheiten der allgemeinen Exponentialfunktion werden in den folgenden Unterkapiteln als Anmerkungen angeführt.

2.4.2 Die Ableitung der *e*-Funktion

Wir wollen die *e*-Funktion ableiten (siehe [1], Seite 492), um in weiterer Folge mehr über ihre Eigenschaften zu erfahren:

$$y' = \lim_{h \to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim e^x \cdot \frac{e^h - 1}{h} = e^x \cdot \lim \frac{e^h - 1}{h}$$

Wegen $e^h = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{h^i}{i!}$ gilt zunächst

$$\frac{e^h - 1}{h} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{h^{i-1}}{i!} = 1 + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{h^{i-1}}{i!}.$$

Es folgt

$$\left| \frac{e^{h-1}}{h} - 1 \right| = \left| \sum_{i \geq 2} \frac{h^{i-1}}{i!} \right| \leq |h| \cdot \left(\sum_{i \geq 2} \frac{|h|^{i-2}}{i!} \right) < |h| \cdot \left(\sum_{i \geq 2} \frac{|h|^{i-2}}{(i-2)!} \right) = |h| \cdot e^{|h|}$$

Lässt man somit *k* gegen 0 gehen, geht die obere Schranke gegen 0, weshalb

$\lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$ ist. ■

Allgemein gilt somit: $\left(e^x\right)' = e^x$. Die *e*-Funktion ist also invariant gegenüber der Differentiation. Insbesondere ist sie daher auch unendlich oft differenzierbar.

Die Integration bietet daher ebenfalls keine Schwierigkeit: $\int e^x \, dx = e^x + C$.

Mit anderen Worten: bis auf die Integrationskonstante C bleibt die *e*-Funktion bei Differentiation und Integration unverändert – eine absolut erstaunliche Eigenschaft!

Man könnte sagen, e^x ist für die Differentiation das Analogon zur Null in der Addition, zur Eins in der Multiplikation und zur ersten Potenz in der Potenzrechnung: es ist eine „Einheitsfunktion“ für die Differentiation (siehe [10], Seite 7).

Diese Besonderheit wird auch im Zusammenhang der Exponentialfunktion mit dem *stetigen Wachstum* offenbar, bei dem der Zuwachs (einer Population, eines Kapitals, ...) nicht nur proportional zur vergangenen Zeit, sondern auch zur jeweils vorhandenen Menge ist. Das stetige Wachstum kann mathematisch ausgedrückt werden wie folgt (siehe [10], Seite 7):

$df = k \cdot f \cdot dt$, woraus sich ergibt: $f' = k \cdot f$ bzw. im einfachsten Fall ($k = 1$): $f' = f$. Es folgt: $f = C \cdot e^x$ (→ 2.4.4 Kurvendiskussion).

Bemerkung: Auch die allgemeine Exponentialfunktion $y = a^x = e^{x \ln a}$ ist unendlich oft differenzierbar, und es gilt:

$$\left(a^x\right)' = a^x \cdot \ln a = e^{x \ln a} \cdot a^x \qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

2.4.3 Eigenschaften der e-Funktion

Anhand der Ableitung, die wir soeben hergeleitet haben, ist es nun ein Leichtes, die *e*-Funktion auf ihre Besonderheiten hin zu untersuchen. Wir wollen diese ähnlich einer Kurvendiskussion, wie sie auch in Schul-Beispielen vorkommen könnte, aufzeigen.

Die Exponentialfunktion ist $\forall e^x, x > 0$ *stets* streng monoton wachsend. Dies folgt unmittelbar aus der Summendarstellung von e^x (→ Abschnitt 2.4).

Vier Alternativ-Beweise für die Monotonie der Exponentialfunktion bieten [42], [43].

Bemerkung: Für die allgemeine Exponentialfunktion $y = a^x = e^{x \ln a}$ gilt: sie ist monoton steigend, wenn $a > 1$ ist, und monoton fallend, wenn $0 < a < 1$ ist; jedenfalls gilt also Monotonie.

Außerdem gilt: Die Exponentialfunktion wächst viel rascher nach unendlich als jede Potenz mit noch so großem positivem Exponenten (siehe [10], Seite 186; [3], Volume 3, Seite 444), also:

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{|x|^b} = \infty$, bzw. gleichbedeutend: $\lim\limits_{x \to -\infty} |x|^b e^x = 0$ für $b > 0$ beliebig.

Beweis-Skizze (siehe [45]):

Wollen wir das Grenzwertverhalten einer Funktion $f(x)$ beim Übergang $x \to \infty$ mit dem einer Potenzfunktion vergleichen, so interessieren wir uns eigentlich für den Grenzwert

$$\lim_{x \to +\infty} x^a \cdot f(x) \quad \text{(á reell).}$$

Wir setzen $f(x) = \dfrac{1}{e^x}$, um das Grenzwertverhalten der Exponentialfunktion bei $x \to \infty$ zu untersuchen, und betrachten den Grenzwert $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^a}{e^x}$.

Nun ordnen wir der reellen Zahl x ($x > 0$) die nichtnegative ganze Zahl n zu, sodass gilt: $n \le x < n+1$. Bekanntlich ist $e > 2$, und die Funktion $y = 2^x$ ist monoton steigend, also ergibt sich:

$$e^x > 2^x \ge 2^n = (1+1)^n \ge (1+n) > x \text{, daher also } e^x > x.$$

Für beliebiges $p > 0$ folgt daraus

$$e^{px} > x^p, \quad \frac{x^{p-1}}{e^{px}} < \frac{1}{x}, \quad \text{also} \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{x^{p-1}}{e^{px}} = 0$$

(wobei nur der Fall $p > 1$ wirklich von Interesse ist).

Setzt man nun $x = sy^g$ ($s, g > 0$), so erhält man:

$$\lim_{y \to +\infty} \frac{(sy^g)^{p-1}}{e^{psy^g}} = 0$$

Daraus ergibt sich mit den Bezeichnungen $g(p-1) =: a$ sowie $ps =: b$ und durch Vertauschung von *x* mit *y* der folgende Grenzwert:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^a}{e^{bx^g}} = 0 \quad (a, b, g > 0 \text{ beliebig})$$

Betrachten wir nun den Sonderfall $b = g = 1$, dann sehen wir: Die Exponentialfunktion wächst viel rascher nach ∞ als jede Potenz mit noch so großem positivem Exponenten. ■

<u>Anmerkung</u>:

Die obige Beziehung gilt auch für die allgemeine Exponentialfunktion a^x anstelle von e^x, da, wie früher gezeigt wurde, gilt: $a^x = (e^x)^{\ln a}$.

2.4.4 Kurvendiskussion

Dadurch, dass die Ableitung der Funktion gleich der Funktion selbst ist, ergibt sich eine überraschende Einfachheit, was die typischen Elemente der Kurvendiskussion betrifft: die *e*-Funktion hat keine Schnittpunkte mit der *x*-Achse, sie hat kein Maximum und kein Minimum, sie hat keine Wendepunkte und auch keine vertikalen Asymptoten – wie sollte sie auch, da doch die erste und zweite Ableitung stets ungleich 0 sind!

Man könnte also denken, es handle sich hier um eine recht langweilige Funktion. Das allerdings ist weit gefehlt. Was die Exponentialfunktion so interessant macht, ist der bereits oben erwähnte Zusammenhang $f' = f$, der ja auch die Änderungsgeschwindigkeit der Funktion beschreibt.

Eine Funktion, die als Resultat der eigenen Differentiation auftritt, besitzt die Eigenschaft, dass ihre Steigung überall durch den Funktionswert angegeben ist, das heißt: je größer sie ist, desto rascher wächst sie an.

Es soll hier auch darauf hingewiesen werden, dass die *e*-Funktion (mit einer multiplikativen Konstante) die *einzige* Funktion ist, die diese Eigenschaft besitzt. Das heißt, alle Funktionen, die zu ihrer eigenen Ableitung proportional sind, die also die Bedingung

$$\frac{dy}{dx} = y$$

erfüllen, gehören zu einer Familie von Exponentialkurven mit allgemeiner Schreibweise $y = C \cdot e^x$, wo C eine beliebige Konstante darstellt (siehe [5], Seite 96).

Beweis[20]:

Angenommen, $y = g(x)$ wäre eine Lösung der (allgemeineren) Differentialgleichung $y' = ky,\ k \in \mathbb{R},\ k \neq 0$. Dann gilt:

$$g'(x) = k \cdot g(x) \quad \text{oder} \quad g'(x) - k \cdot g(x) = 0$$

Bilden wir nun die Funktion $h(x) = g(x) \cdot e^{-kx}$, dann ist

$$h'(x) = -k \cdot g(x) \cdot e^{-kx} + g'(x) \cdot e^{-kx} = e^{-kx} \cdot \left(g'(x) - k \cdot g(x)\right) = 0$$

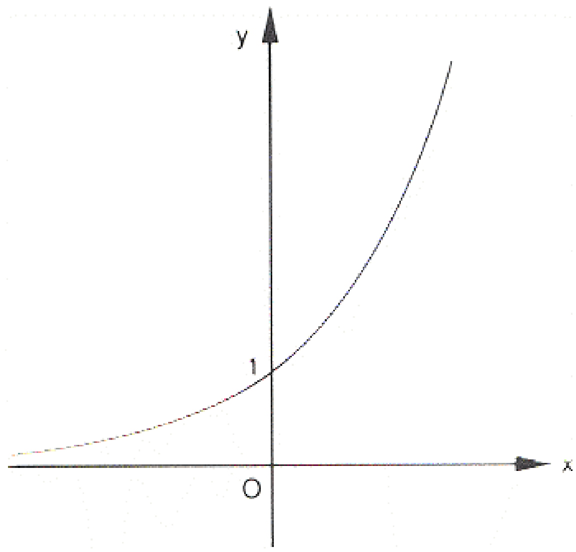
Die Funktion $h(x)$ muss also, da ihre Ableitung Null ist, identisch sein mit einer Konstanten C. Aus $C = g(x) \cdot e^{-kx}$ folgt $g(x) = C \cdot e^{kx}$.

Damit ist gezeigt, dass $g(x)$ der Funktionenmenge $y = C \cdot e^{kx}$ angehört. ■

Ergebnis: Die Differentialgleichung $y' = k \cdot y$ hat als Lösung die einparametrige Funktionenmenge $y = C \cdot e^{kx}$ und nur diese.

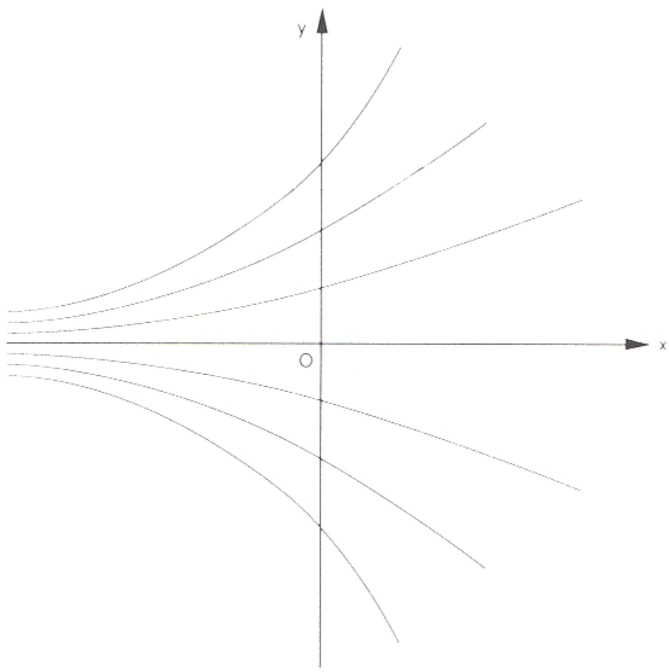
2.4.5 Der Graph der e-Funktion

Für positive reelle x geht der Graph von $y = e^x$ durch die Punkte $(0,1)$ und $(1,e)$ und nähert sich für $x \to -\infty$ asymptotisch der x-Achse an.



Der Graph einer Exponentialfunktion

Die Lösungen der Differentialgleichung $y' = y$ liefern eine ganze Familie von Exponentialfunktionen, die sich nur durch einen multiplikativen Faktor unterscheiden. Dieser Sachverhalt ist in der folgenden Abbildung angedeutet:



Eine Familie von Exponentialfunktionen

Anmerkung:

Der Graph der allgemeinen Exponentialfunktion $y = a^x = e^{x \ln a}$ ist bezüglich der y-Achse symmetrisch zum Graphen von $y = \left(\frac{1}{a}\right)^x$. Wenn $a > 1$ ist, dann wächst a^x bei $x \to \infty$ schneller an als eine beliebige Potenz von x. Geht allerdings $x \to -\infty$, so nähert sich a^x schneller an 0 an als eine beliebige Potenz von $\frac{1}{x}$.

2.4.6 Rechenregeln für Exponenten

Zwei wichtige Regeln für das Rechnen mit Exponenten sollen hier genannt werden:

1) Es gilt: $e^{x_1} e^{x_2} = e^{x_1 + x_2}$.

Beweis[21]:

Seien $x, y \in \mathbb{R}$ beliebig gewählt.

Wir beweisen die zur obigen Aussage äquivalente Gleichung: $e^x \cdot e^y - e^{x+y} = 0$

Nach Definition ist

$$e^x \cdot e^y - e^{x+y} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \cdot \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{y}{n}\right)^n - \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x+y}{n}\right)^n =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x+y}{n}+\frac{xy}{n^2}\right)^n - \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x+y}{n}\right)^n =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{x+y}{n}+\frac{xy}{n^2}\right)^n - \left(1+\frac{x+y}{n}\right)^n\right] =$$

(Anwendung der Binomischen Formel)

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{xy}{n}\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{x+y}{n}+\frac{xy}{n^2}\right)^{n-k}\left(1+\frac{x+y}{n}\right)^n\right] = 0$$

da $\left(\frac{xy}{n}\right)$ eine Nullfolge darstellt und $\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{x+y}{n}+\frac{xy}{n^2}\right)^{n-k}\left(1+\frac{x+y}{n}\right)^{k-1}\right)$ eine beschränkte Folge ist, wie die nachstehende Abschätzung zeigt:

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{x+y}{n}+\frac{xy}{n^2}\right)^{n-k}\left(1+\frac{x+y}{n}\right)^{k-1}\right| \le$$

$$\le \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{|x|+|y|}{n}+\frac{|x||y|}{n^2}\right)^{n-k}\left(1+\frac{|x|+|y|}{n}\right)^{k-1} \le$$

$$\leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{|x|+|y|}{n}+\frac{|x||y|}{n^2}\right)^{n-k}\left(1+\frac{|x|+|y|}{n}+\frac{|x||y|}{n^2}\right)^{k-1} =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{|x|+|y|}{n}+\frac{|x||y|}{n^2}\right)^{n-1} =$$

$$= \frac{\left(1+\frac{|x|+|y|}{n}+\frac{|x||y|}{n^2}\right)^{n}}{1+\frac{|x|+|y|}{n}+\frac{|x||y|}{n^2}} = \frac{\left(1+\frac{|x|}{n}\right)^{n}\cdot\left(1+\frac{|y|}{n}\right)^{n}}{1+\frac{|x|+|y|}{n}+\frac{|x||y|}{n^2}} \leq$$

$$\leq \left(1+\frac{|x|}{n}\right)^{n}\cdot\left(1+\frac{|y|}{n}\right)^{n} \leq e^{|x|}\cdot e^{|y|} \quad \blacksquare$$

Wesentlich einfacher kann der Beweis dieser Rechenregel über Taylor-Entwicklungen erfolgen (siehe [10]). Die *e*-Funktion wird hier als $f(x)$ angeschrieben:

$$f(x_1+x_2) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(x_1)\frac{x_2^{\ n}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} f(x_1)\frac{x_2^{\ n}}{n!} = f(x_1)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x_2^{\ n}}{n!} = f(x_1)f(x_2) \quad \blacksquare$$

Verwendet werden dabei die Beziehungen $f^{(n)} = f$ sowie $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$.

2) Weiters gilt: $e^{mx} = (e^x)^m$, wenn $m \in \mathbb{Z}$ und $x \in \mathbb{R}$.

Beweis[22]:

Für $m = 0$ folgt die Behauptung aus der Tatsache, dass $e^0 = 1$ ist.

Für $m = 1$ ist die Behauptung trivial.

Für beliebiges $m \in \mathbb{N}$ folgt die Behauptung durch Induktion anhand von:

$$e^{(m+1)x} = e^{mx+x} = e^{mx}\cdot e^x$$

Bei $m \in \mathbb{Z}$, negativ, setzen wir $n := -m$ und erhalten dadurch:

$$e^{mx} = e^{-nx} = \frac{1}{e^{nx}} = \frac{1}{(e^x)^n} = (e^x)^m . \ \blacksquare$$

Aus diesem Satz folgt für alle $n \in \mathbb{N}$ und für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$\left(e^{\frac{x}{n}}\right)^n = e^x, \text{ also auch } e^{\frac{x}{n}} = \sqrt[n]{e^x} .$$

Die Existenz der *n*-ten Wurzel wurde hier gleich mitbewiesen, ohne dass wir sie voraussetzen hätten müssen.

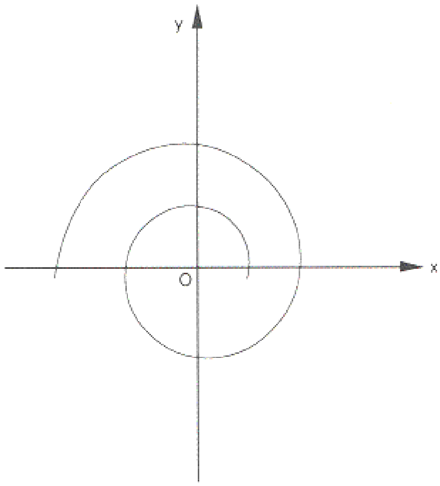
2.5 e^q – die logarithmische Spirale

Eine besondere Kurve ist die logarithmische Spirale, die in der ersten Hälfte des 17. Jahrhunderts von Descartes entdeckt (und 1638 in seinen Briefen an Mersenne besprochen) und vor allem von Jakob I. Bernoulli untersucht wurde. Sie wird beschrieben durch die Gleichungen

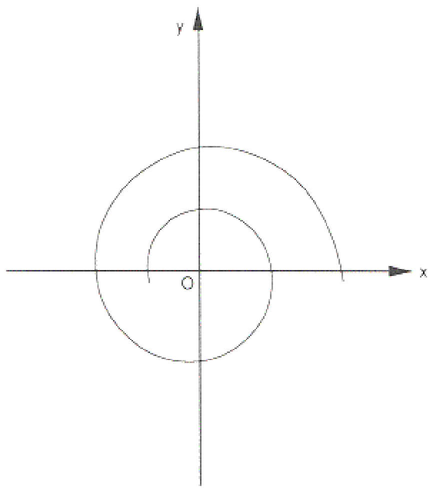
$$r = e^{aq} \quad \text{bzw.} \quad \ln r = aq\,.$$

Heute gelten diese beiden Formulierungen selbstverständlich als äquivalent; zu Bernoullis Zeiten allerdings war die Exponentialfunktion noch nicht als eigenständige Funktion anerkannt, ja es gab noch nicht einmal ein eigenes Symbol für *e*. Daher war die zweitgenannte Gleichung diejenige, die Bernoulli verwendete (siehe [5], Seite 115).

Ist der Faktor a aus der obigen Gleichung *positiv*, so nimmt der Abstand r vom Mittelpunkt bei Bewegung entgegen des Uhrzeigersinns zu – man erhält eine *linksdrehende* Spirale. Ist a hingegen *negativ*, so nimmt der Abstand r ab – die Spirale ist *rechtsdrehend*. Die beiden Spiralen liegen spiegelbildlich zueinander.



linksdrehende Spirale $r = e^{aq}$



rechtsdrehende Spirale $r = e^{-aq}$

Auf den ersten Blick scheint es sich bei der logarithmischen Spirale um eine „ganz gewöhnliche“ Spirale zu handeln, derer es viele gibt. Dem ist allerdings nicht so, denn eine Eigenschaft hebt sie ganz besonders hervor (siehe [1], Seite 598). Diese besteht darin, dass der Radiusvektor mit der Kurve selbst stets den gleichen Winkel bildet[23]. Daher nennt man die logarithmische Spirale manchmal auch die *gleichwinklige Spirale*.

Coxeter [32] geht von der allgemeineren Form $r = C \cdot e^{a\theta}$ aus und erklärt diesen Sachverhalt wie folgt:

Ist eine Kurve in Polarkoordinaten gegeben, so gilt für den Winkel φ zwischen dem Vektor $\overrightarrow{OP}$ und der Tangente in einem Punkt *P* der Kurve $tg\varphi = r \cdot \frac{d\theta}{dr}$.

In dem speziellen Fall folgt $\cot \varphi = \frac{1}{r} \cdot \frac{dr}{d\theta} = \frac{1}{r} \cdot Ce^{a\theta} \cdot a = a$, φ ist also konstant.

Für eine detaillierte Betrachtung der Peripheriewinkel in der logarithmischen Spirale sei auf die Literatur verwiesen (siehe [40]).

Bei einer Vergrößerung des Radiusvektors in jedem beliebigen konstanten Verhältnis, also bei einer Streckung, geht die Kurve immer in sich selbst über.

Anders ausgedrückt: lässt man den Winkel θ um gleiche Beträge wachsen, dann vervielfacht sich der Abstand *r* vom Mittelpunkt in gleichen Verhältnissen, also in einer geometrischen Folge.

Man kann auch sagen: jede Streckung bewirkt dasselbe wie eine Drehung und umgekehrt.

Der Grund dafür liegt in den Rechenregeln für Exponenten, da ja gilt:

$$e^{a(\theta + f)} = e^{a\theta} \cdot e^{af}$$

Dabei beschreibt der Faktor e^{af} das oben genannte Verhältnis (siehe [5], Seiten 115-116).

Jakob I. Bernoulli war von dieser Eigenschaft derart angetan, dass er den Wunsch äußerte, eine logarithmische Spirale solle auf seinem Grabstein eingemeißelt werden. Sie sollte die Inschrift tragen, „eadem mutata resurgo“ – „verwandelt kehre ich als dieselbe wieder“ (siehe [1], Seite 598, sowie [5], Seite 108, und [39]).

Die nächsten Verwandten veranlassten die Herstellung des Epitaphen, wie in Basel damals üblich. In Bernoullis Fall war das seine Witwe, wie auch dem Epitaphen selbst zu entnehmen ist. Was die Inschrift betrifft, wurde sein Wunsch erfüllt, wovon man sich im Münster in Basel überzeugen kann. Leider klappte es mit dem anderen Teil des Wunsches nicht so recht. Denn der (unbekannte) Steinmetz lieferte zwar eine Spirale, leider aber keine *logarithmische*, sondern vielmehr eine *archimedische*. Es ist nicht überliefert, ob dieser Fehler auf Unwissenheit beruht oder auf der simplen Tatsache, dass eine arithmetische Spirale wohl einfacher zu meißeln ist (siehe [5], Seiten 120-121). Vermutlich kannten ganz einfach weder der Hersteller des Epitaphen noch Bernoullis Witwe eine logarithmische Spirale. Klar dürfte jedenfalls sein, dass Bernoulli mit dem Ergebnis wenig Freude gehabt hätte...

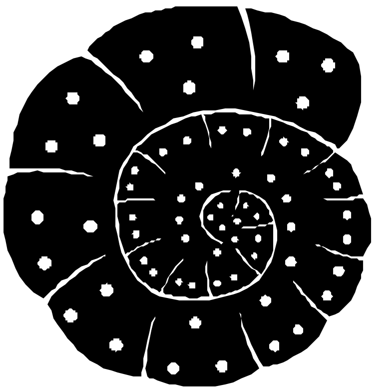
Eine weitere Besonderheit soll hier ebenfalls noch Erwähnung finden. Während man unendlich viele Umdrehungen zurücklegen muss, wenn man sich auf einer logarithmischen Spirale von einem festen Punkt aus nach innen bis zum Mittelpunkt bewegen will, ist die dabei zurückgelegte Strecke dennoch endlich. Diese spannende Tatsache wurde 1645 von Evangelista Torricelli[24] entdeckt. Nicht nur das, er ermittelte auch die exakte Länge der zurückgelegten Strecke[25].

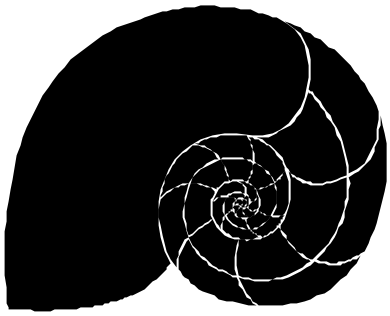
2.5.1 Vorkommen

Einen Sonderfall der logarithmischen Spirale stellt der *Kreis* dar, für den die Wachstumsgeschwindigkeit $a = 0$ beträgt. Es ergibt sich:

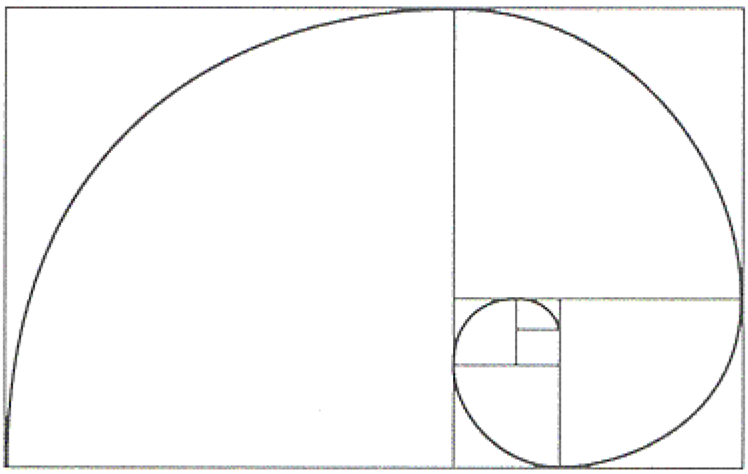
$$r = e^0 = 1\,.$$

Häufig tritt die logarithmische Spirale in der Natur auf, so etwa bei Schneckengehäusen und Sonnenblumen.



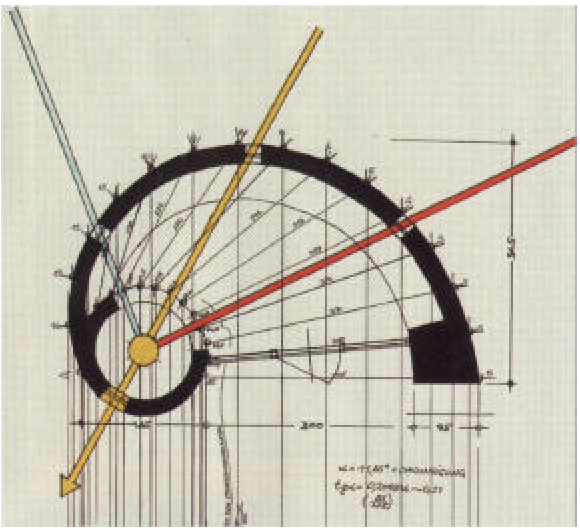


Aber auch in der Kunst findet die logarithmische Spirale Verwendung. Sie ist eng verwandt mit dem Goldenen Schnitt, wie die folgende Grafik mit „Goldenen Rechtecken“ zeigt, die eine logarithmische Spirale umschreiben. Bei jedem Rechteck verhält sich die Länge zur Breite wie 1,61803... zu 1.



Goldene Rechtecke umschreiben eine logarithmische Spirale

Sogar als Grundriss für Gebäude dient die „spira mirabilis“ manchmal, im folgenden Beispiel für eine Kapelle[26]:



Grundriss: logarithmische Spirale, die in einem Kreis endet

Hauskapelle Texing

2.5.1 Exkurs: Archimedische Spirale

Die *archimedische Spirale*, auch *lineare Spirale* genannt, nimmt auf dem Epitaph von Jakob Bernoulli (im Kreuzgang des Münsters in Basel) jene prominente Stelle ein, die eigentlich für die logarithmische Spirale vorgesehen war.

Bei der arithmetischen Spirale wächst der Abstand vom Mittelpunkt mit jeder Umdrehung um eine konstante *Differenz* (und nicht um einen konstanten *Quotienten* wie bei der logarithmischen Spirale). Ein Beispiel sind etwa die Rillen einer Schallplatte (korrekter müsste es heißen: ein Beispiel *ist die Rille* einer Schallplatte, denn jede Schallplatte hat ja maximal zwei Rillen, eine auf jeder Seite ...).

2.6 Die Exponentialfunktion im Komplexen

Nachdem wir uns im Reellen ausführlich mit den Eigenschaften und Besonderheiten der Exponentialfunktion befasst haben, ist es der logische nächste Schritt, die Funktion auch in der komplexen Ebene zu betrachten.

2.6.1 Einführung

Die reelle Funktion e^z lässt sich auch für komplexe Exponenten definieren. Formal ersetzt man in der Reihenentwicklung von e^z das $x \in \mathbb{R}$ einfach durch $z \in \mathbb{C}$:

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots$$

Dabei muss man aber zeigen, dass diese Reihe im Komplexen stets konvergiert.

So wie im reellen Fall gilt auch hier für alle z: $e^z = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$

Es sei am Rande angemerkt, dass wir hiermit zugleich eine Antwort auf die Frage gefunden haben, wie denn eine Potenz mit komplexem Exponenten zu behandeln sei. Auf den ersten Blick erscheint diese Frage schwierig, für einen bestimmten Fall haben wir sie aber gerade beantwortet.

2.6.2 Sinus und Cosinus im Komplexen

Bevor wir uns nun näher mit den Eigenschaften und Besonderheiten der komplexen Exponentialfunktion befassen, ist es aus Gründen, die bald offensichtlich werden, nötig, das Verhalten der Funktionen Sinus und Cosinus bei Übertragung in die komplexe Ebene näher zu betrachten.

Wie e^x lassen sich auch die Funktionen $\sin x$ sowie $\cos x$ problemlos vom Reellen auf das Komplexe ausdehnen, und die entsprechenden Entwicklungen lauten:

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots \text{ bzw. } \cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \cdots \quad (z \in \mathbb{C})$$

Beide Reihen konvergieren für alle $z \in \mathbb{C}$, die Funktionen sind also wohldefiniert.

2.6.3 Spezialfall: e^{iy}

Nun betrachten wir einen Spezialfall der komplexen e-Funktion, nämlich jenen Fall, bei dem der Realteil gleich null ist, sprich: e^z, wo $z = iy$ (y reell). Die Reihe hat dann die Form (siehe [1], Seiten 650-652):

$$e^{iy} = 1 + \frac{iy}{1!} + \frac{(iy)^2}{2!} + \frac{(iy)^3}{3!} + \cdots$$

und wir teilen diese unendliche Reihe wie folgt[27]:

$$e^{iy} = 1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + \cdots + i\frac{y}{1!} - i\frac{y^3}{3!} + i\frac{y^5}{5!} - \cdots$$

Wir erkennen ohne große Schwierigkeiten, was das bedeutet. Beim ersten Teil dieser Reihe handelt es sich um die Reihe für den Cosinus von y, beim zweiten Teil wiederum um die Reihe von i mal Sinus y. Insgesamt ergibt sich also:

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y \,.$$

Daraus folgt direkt einer der interessantesten Gleichungen der Mathematik überhaupt:

2.6.4 Die Euler-Gleichung

Hier erfolgt der Brückenschlag zwischen Exponentialfunktion und trigonometrischen Funktionen. Besonders schöne Spezialfälle ergeben sich, wenn wir $z = 2\boldsymbol{p}i, \boldsymbol{p}i, \frac{\boldsymbol{p}}{2}i$ setzen (diese lassen sich bereits aus der Formel e^{iy} ableiten):

$$e^{2pi} = \cos 2\boldsymbol{p} + i \sin 2\boldsymbol{p} = 1$$
$$e^{pi} = \cos \boldsymbol{p} + i \sin \boldsymbol{p} = -1$$
$$e^{\frac{p}{2}i} = \cos \frac{\boldsymbol{p}}{2} + i \sin \frac{\boldsymbol{p}}{2} = i$$

Die zweite Beziehung liefert eine Formel, die die fünf wichtigsten Konstanten der Mathematik miteinander verbindet:

$$e^{ip} + 1 = 0$$

Hier sind Arithmetik durch 0 und 1 repräsentiert, Algebra durch i, Geometrie durch ð und schließlich die Analysis durch e. Außerdem enthält diese Formel die drei bedeutendsten mathematischen Operationen: Addieren, Multiplizieren und Potenzieren[28].

Eine Motivation für die Eulersche Formel, die sich durch besondere Eleganz auszeichnet, soll hier ebenfalls erwähnt werden (siehe [22]):

Man geht davon aus, dass e^{ix} (x reell) so definiert werden soll, dass die Grundeigenschaft der Potenz, $a^x a^y = a^{x+y}$, erfüllt ist. Dazu bedienen wir uns der Moivre-Formel[29], $(\cos \boldsymbol{j} + i \sin \boldsymbol{j})^n = \cos(n\boldsymbol{j}) + i \sin(n\boldsymbol{j})$.

Wenn e^{ix} tatsächlich passend definiert werden kann, dann gilt:

$$e^{ix} = a + ib = r(\cos \boldsymbol{j} + i \sin \boldsymbol{j}) \quad \text{mit} \quad r = r(x) \quad \text{sowie} \quad \boldsymbol{j} = \boldsymbol{j}(x).$$

Wenden wir nun die Potenzeigenschaft an, so ergibt sich nach oben:

$$\left(e^{ix}\right)^n = r^n (\cos \boldsymbol{j} + i \sin \boldsymbol{j})^n$$
$$\Rightarrow \quad e^{i(nx)} = r^n [\cos(n\boldsymbol{j}) + i \sin(n\boldsymbol{j})] \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{j}(nx) = n\boldsymbol{j}(x).$$

Hier wählen wir nun (abgesehen von der Nullfunktion) die „einfachste" Funktion:

$\boldsymbol{j}(x) = x$. Diese erfüllt die Eigenschaft $\boldsymbol{j}(nx) = n\boldsymbol{j}(x)$.

Also ergibt sich: $e^{ix} = r(\cos x + i \sin x)$.

Das bisher unbekannte $r = r(x)$ erhalten wir folgendermaßen:

$$r(\cos x + i\sin x) = e^{ix} \quad \text{sowie} \quad r(\cos x - i\sin x) = r[\cos(-x) + i\sin(-x)] = e^{i(-x)}$$

Multiplikation liefert:

$$r(\cos x + i\sin x)\cdot r(\cos x - i\sin x) = e^{ix}e^{i(-x)}$$

$$\Rightarrow \quad r^2\left(\cos^2 x + \sin^2 x\right) = e^0$$

$$\Rightarrow \quad r^2 = 1$$

Von den beiden möglichen Lösungen wählen wir stets $r = 1$.

Auf Grundlage dieser Ergebnisse definieren wir nun:

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x$$

Mit dieser Definition ist auch die geforderte Eigenschaft erfüllt:

$$e^{ix}e^{iy} = e^{ix+iy}\text{, denn}$$

$$e^{ix}e^{iy} = (\cos x + i\sin x)\cdot(\cos y + i\sin y) = \cos(x+y) + i\sin(x+y) = e^{i(x+y)} = e^{ix+iy} \quad \blacksquare$$

Eine Herleitung der Eulerschen Formel mittels Grenzwertbetrachtungen, die auf Reihenentwicklungen völlig verzichtet, findet sich in [41].

2.6.5 Periodizität

Da sich die Definition der Exponentialfunktion im Komplexen nur durch die Schreibweise der Variablen vom reellen Fall unterscheidet, behalten sämtliche Rechenregeln ihre Gültigkeit, wie etwa $e^{z_1}\cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$.

Aus der Eulerschen Formel erkennen wir, dass e^z eine Periodizität aufzuweisen hat, denn es gilt: $e^{z+2pi} = e^z\cdot e^{2pi} = e^z\cdot 1 = e^z$.

e^z ist also periodisch mit der Periode $2pi$: $e^{z+2pi} = e^z$. Diese Periode ist uns nur bisher nicht „aufgefallen“, weil sie rein komplex ist und daher im Reellen gar nicht in Erscheinung treten *kann*.

Die Gleichung $e^z = a$ hat daher unendlich viele Lösungen für alle $a \neq 0$ (→ 2.7.3 Logarithmus im Komplexen).

2.6.6 $e^z=e^{x+iy}$

Betrachten wir die Exponentialfunktion e^z nun für allgemeines $x + iy = z \in \mathbb{C}$, so stellen wir fest, dass alle Eigenschaften, die wir bisher kennengelernt haben, auch hier analog gelten. So ist etwa auch die Ableitung der Funktion gleich der Funktion selbst:

Ist eine Funktion $w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ im Punkt $z = x + iy$ differenzierbar, so ist ihre Ableitung dort gegeben durch

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\cdot\frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{bzw. äquivalent durch} \quad \frac{dw}{dz} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\cdot\frac{\partial u}{\partial y}$$

Handelt es sich bei der Funktion um die Exponentialfunktion, so gilt:

$$w = e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} \quad \Rightarrow \quad u = e^x \cos y \quad \text{sowie} \quad v = e^x \sin y$$

woraus sich wiederum die Ableitungen ergeben wie folgt:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y \quad \text{sowie} \quad \frac{\partial v}{\partial x} = e^x \sin y$$

Wir erhalten als Endergebnis:

$$\frac{d}{dz}\left(e^z\right) = e^x\left(\cos y + i \sin y\right) = e^z \quad \blacksquare$$

<u>Anmerkung</u>: Wie die Zwischenergebnisse zeigen, gilt die bereits oben hergeleitete Eulersche Formel also nicht nur für e^{iy} mit $y \in \mathbb{R}$, sondern für e^{iz} mit $z \in \mathbb{C}$.

Daraus folgen die Beziehungen:

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z$$

$$e^{-iz} = \cos z - i \sin z$$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad \text{bzw.} \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2}$$

Die Tatsache, dass e^z bei Differentiation unverändert bleibt, hätten wir auch auf einem anderen Weg zeigen können: die Potenzreihe für e^z ist ja absolut konvergent und daher erhält man ihre Ableitung auch durch gliedweises Differenzieren. Es ist offensichtlich, dass sich in diesem Fall dieselbe Potenzreihe wieder ergibt, sodass $\left(e^z\right)' = e^z$ gilt.

Eine weitere Eigenschaft ist:

$$z = x + iy \quad \Rightarrow \quad \left|e^z\right| = e^x \quad \text{sowie} \quad Arg\, e^z = y + 2\pi k \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

e^z nimmt alle komplexen Werte außer 0 an.

Wenn wir nun wiederum e^{x+iy} betrachten und einige einfache Umformungen anwenden, dann ergibt sich:

$e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x \cdot \left(\cos y + i \sin y\right)$, insgesamt also: $e^{x+iy} = e^x\left(\cos y + i \sin y\right)$

2.6.7 Die allgemeine Exponentialfunktion im Komplexen

Die allgemeine Exponentialfunktion a^z mit komplexem a und z wird analog zum Reellen definiert:

$$a^z = e^{z \cdot Lna}$$

wo Lna den Logarithmus der komplexen Zahl a bedeutet.

Die Einführung des Logarithmus erfolgt unmittelbar anschließend, in Abschnitt 2.7.

2.7 Der Logarithmus im Reellen und im Komplexen

Die Umkehrung der Exponentialfunktion, die wir schon hin und wieder verwendet haben, ist die Logarithmusfunktion. Wir wollen hier die wichtigsten Eigenschaften ohne Beweis zusammenstellen, und zwar zunächst im Reellen.

2.7.1 Definition

Ist $g > 1$ und $a > 0$, so besitzt die Gleichung $g^x = a$ genau eine Lösung. Sie wird mit ${}^g\log a$ bezeichnet und der *Logarithmus von a zur Basis oder Grundzahl g* genannt. Liegt die Basis fest, so schreiben wir gewöhnlich $\log a$ statt ${}^g\log a$.

Die Eindeutigkeit der Lösung folgt unmittelbar aus der strengen Monotonie der Exponentialfunktion, die wir bereits bewiesen haben. Es ist also nur noch zu beweisen, dass diese Lösung auch existiert:

Wegen $g > 1$ strebt $\left(\frac{1}{g}\right)^n \to 0$, und da $a > 0$ ist, gibt es also einen Index m derart, dass $\left(\frac{1}{g}\right)^m$ sowohl $\leq a$ als auch $\leq \frac{1}{a}$ ist. Nun setzen wir $x_1 := -m$, $y_1 = m$ und wenden auf das Intervall $[x_1, y_1]$ die Halbierungsmethode so an, dass wir eine Intervallschachtelung $\langle x_n \mid y_n \rangle$ mit $g^{x_n} \leq a \leq g^{y_n}$ für $n = 1, 2, \ldots$ erhalten. Diese Schachtelung erfasst einen Punkt x, und wegen $x_n \to x$, $y_n \to x$ folgt nun, dass $g^x \leq a \leq g^x$, also $g^x = a$ ist. ■

2.7.2 Eigenschaften

Unmittelbar aus der Definition des Logarithmus erhalten wir:

$$ {}^g\log g = 1 \text{ und } {}^g\log 1 = 0 . $$

Außerdem gilt es zu beachten, dass ${}^g\log a$ im Falle $a \leq 0$ nicht definiert ist und im Reellen auch nicht definiert werden kann. Ist nämlich $g > 0$, so kann $g^x = e^{x \cdot \ln g}$ nie negativ werden. Ist aber $g \leq 0$, so ist $\ln g$ gar nicht definiert.

Aus den Rechenregeln für Potenzen sind die folgenden Aussagen direkt ableitbar:

$$ \log(ab) = \log a + \log b, \ \log \frac{a}{b} = \log a - \log b, \ \log a^r = r \log a, \ \log a^{\frac{1}{r}} = \frac{1}{r} \log a $$

(hier gilt jeweils: $r \in \mathbb{R}$, beliebig, aber $r \neq 0$).

Die Logarithmusfunktion $x \mapsto \log x$ ist auf $(0, \infty)$ streng wachsend.

Es gilt: $\log a < 0$ für $a < 1$ sowie $\log a > 0$ für $a > 1$.

Außerdem gilt: $\lim\limits_{x \to 0} {}^g\log x = -\infty$ und $\lim\limits_{x \to \infty} {}^g\log x = +\infty$.

Zwei Basen sind für Logarithmen besonders häufig in Verwendung. Dabei handelt es sich um 10 als Basis des dekadischen Logarithmus, angeschrieben meist durch $\log a$, und um die Eulersche Zahl e als Basis des natürlichen Logarithmus, angeschrieben durch $\ln a$ (in der Literatur manchmal mit $\log a$ bezeichnet).

Die Umrechnung von einer Basis auf die andere erfolgt nach der Formel:

$$^{b}\log x = \frac{^{a}\log x}{^{a}\log b}$$

Denn, ausgehend von der Definition des Logarithmus

$$b^{^{b}\log x} = x$$

erhält man durch Logarithmieren bezüglich der Basis a

$$^{b}\log x \cdot {}^{a}\log b = {}^{a}\log x$$

Und das entspricht ja genau der oben genannten Umrechnungs-Formel. Man erkennt, dass die beiden Logarithmen proportional sind mit Faktor $1/{}^{a}\log b$.

Der Logarithmus wächst viel schwächer nach unendlich als jede Potenz mit noch so kleinem Exponenten (siehe [10], Seite 186).

<u>Beweis-Skizze</u> (siehe [45]):

Wir gehen aus vom Endergebnis des Beweises, dass die Exponentialfunktion viel rascher nach unendlich wächst als jede Potenz mit noch so großem Exponenten (→ 2.4.3 Eigenschaften der e-Funktion). Setzen wir dort $x = \ln y$ und vertauschen nachträglich x mit y, so folgt bei $g = 1$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(\ln x)^{a}}{x^{b}} = 0 \quad (a, b > 0).$$

Der Sonderfall $a = 1$ bedeutet nichts anderes, als dass der Logarithmus viel schwächer nach ∞ wächst als jede Potenz mit noch so kleinem positiven Exponenten, was zu beweisen war. ■

Die Ableitung der Logarithmusfunktion stellt sich dar wie folgt:

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \quad \text{bzw.} \quad (\log_a x)' = \frac{\log_a e}{x} = \frac{1}{x \ln a}.$$

In einer hinreichend kleinen Umgebung kann die Logarithmusfunktion mittels Taylor-Entwicklung in eine Potenzreihe (mit Konvergenzradius 1) verwandelt werden:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

Das Ergebnis am Randpunkt 1 ist die alternierende harmonische Reihe, deren Wert wegen des Abelschen Grenzwertsatzes gleich dem $\ln 2$ ist.

Die Werte des Logarithmus sind meist irrational. Für einzelne Beispiele lässt sich das leicht zeigen.

Man betrachte etwa den ${}^{10}\log 2$. Wegen der Monotonie der Exponentialfunktion ergibt sich $0 < {}^{10}\log 2 < 1$. Wäre nun ${}^{10}\log 2$ ein echter Bruch $\frac{p}{q}$ (p, q∈ℕ*, q≠1, p<q), würde gelten:

$$10^{\frac{p}{q}} = 2 \quad \Rightarrow \quad 10^{p} = 2^{q} =: a$$

Die Zahl a hätte also zwei verschiedene Primfaktor-Zerlegungen, nämlich $a = 2^{q} = 2^{p} \cdot 5^{p}$. Dieser Widerspruch impliziert die Irrationalität von ${}^{10}\log 2$. Siehe dazu auch Abschnitt 4.1.4. ■

2.7.3 Logarithmus im Komplexen

Im Komplexen ist die Logarithmusfunktion für alle Werte außer $z = 0$ definiert und wird, um Verwechslungen zu vermeiden, angeschrieben mit einem Großbuchstaben: Lnz.

Der so genannte Hauptwert ist gegeben durch: $\ln z = \ln|z| + i \arg z$

(wo $\arg z = \arctan\frac{b}{a}$ [mit $z = a + ib$] den Wert des Arguments von z darstellt, mit $-\pi < \arg z \leq \pi$).

Die weiteren Werte dieser unendlichwertigen „Funktion“ $Ln\, z$ ergeben sich folgendermaßen aus der Periodizität:

$$Ln\, z = \ln z + 2k\pi i\text{, wo } k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Logischerweise sind alle Logarithmen von negativen Zahlen rein komplex – im Reellen ist der Logarithmus für negative Zahlen ja nicht definiert und daher auch nicht lösbar!

3. Praktische Anwendungen

Anhand verschiedener Beispiele soll aufgezeigt werden, dass die Eulersche Zahl (durch ihr Auftreten in der Exponentialfunktion) in verschiedensten Fachgebieten ganz elementare Zusammenhänge beschreibt. Im Anschluss folgt ein Kapitel darüber, warum das so ist.

Die Anwendungen sind, wie im Folgenden gezeigt wird, sehr vielfältig. Wie weit die Auswirkungen aber tatsächlich reichen, macht folgender Ausschnitt aus einem Fachartikel bewusst (siehe [27], Seite 290):

»Es ist experimentell nachprüfbar, dass die Höhe des Bierschaums in einem Glas exponentiell mit der Zeit abnimmt. Eine Versuchsreihe lieferte das Gesetz

$h = h_0 e^{-kt}$ mit $h_0 = 6cm$ und $k = 0{,}022 s^{-1}$.«

Zahlreiche Anwendungen finden hier aus Platzgründen keine Berücksichtigung, darunter beispielsweise die logarithmischen Skalen, die Bedeutung der Exponentialfunktion für Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik und das Vorkommen bei der Berechnung von Schwingungen und Wellen.

3.1 „Exponentialgesetz“ (Einleitung in einem Physik-Buch [38])

Interessant ist in diesem Zusammenhang, wie in einem Physik-Lehrbuch für Mediziner, Biologen und Pharmazeuten [38] auf die Exponentialfunktion und ihre praktische Anwendung eingegangen wird. Es heißt hier etwa:

»Das Exponentialgesetz tritt zur Beschreibung verschiedenster physikalischer Vorgänge auf, wobei die mathematischen Größen unterschiedliche Bedeutung haben.«

Es werden dann die Beispiele namentlich genannt, die im Buch vorkommen, und zwar die zeitliche Abnahme radioaktiver Stoffe, die Dämpfung einer Schwingung, die Zeitabhängigkeit des Stromes beim Anlegen einer Spannung an einen Kondensator.

»Ebenso taucht es auf bei der Beschreibung der Zunahme der Erdbevölkerung, beim organischen Wachstum wie etwa der Zunahme der Zahl von Bakterien einer Kultur, bei der Abnahme des Luftdrucks mit der Höhe oder der Sonneneinstrahlung mit zunehmender Luftverschmutzung etc.«

Die Autoren versuchen dann die Gemeinsamkeiten dieser Prozesse herauszuarbeiten, was ihnen zwar auf sehr wissenschaftlichem Niveau ausgezeichnet gelingt, die Ausführungen sind meiner Einschätzung nach allerdings nicht dem Zielpublikum (MedizinerInnen, BiologInnen und PharmazeutInnen) angepasst. Eine Kostprobe:

»Eine beliebige Messgröße y hänge so von einer Variablen x ab, dass ihre relative Änderung $\Delta y / y$ *unabhängig ist vom Zahlenwert von x, aber proportional zum Intervall* Δx*, in welchem man die Änderung von y misst. Dies gelte auch für beliebig kleine Werte von* Δx *(*$\Delta x \to dx$*) und* Δy *(*$\Delta y \to dy$*). In der Formelsprache der Differentialrechnung heißt das:*

$$\frac{dy}{y} = \pm A dx$$ «

Leider wird in diesem ansonsten ausgezeichneten Lehrbuch nicht weiter auf die Exponentialfunktion eingegangen; es findet sich nicht einmal bei allen praktischen Anwendungen im übrigen Text ein Hinweis darauf, dass es sich bei den Zusammenhängen um Exponentialfunktionen handelt!

Positiv hervorzuheben ist hingegen, dass eine oft vergessene Einschränkung für die Anwendbarkeit der Exponentialfunktion erwähnt wird:

»Es muss erwähnt werden, dass die Verwendung von dx in unseren Beispielen [diese handelten von Bakterienkulturen, Anm.] mathematisch nicht exakt ist: In Strenge erhält man eine Exponentialfunktion [...] nur, wenn y und x kontinuierliche Variable sind. Bei unseren Anwendungsbeispielen gilt dies jedoch nicht. An die Stelle der kontinuierlichen Variablen y tritt dort eine Größe, die nur ganze Zahlen annehmen kann, nämlich die Zahl der Bakterien. Sie kann nur in ganzzahligen Schritten verändert werden. Daher kann auch dy/y nicht beliebig klein werden. Bei großen Zahlen von y gilt dies jedoch in recht guter Näherung [...].«

3.2 Das Weber-Fechnersche Gesetz

Ernst Heinrich Weber[30], einer der Namensgebenden für das Weber-Fechnersche Gesetz, untersuchte 1825 in einer Reihe von Experimenten die menschliche Reaktion auf verschiedene physikalische Reize. Er stellte dabei fest, dass die Empfindung nicht von der absoluten, sondern von der relativen Änderung des Reizes abhängig ist. Kann man etwa beim Halten von Gewichten einen Zuwachs um 1kg von 10kg auf 11kg gerade noch wahrnehmen, so liegt diese Wahrnehmungsschwelle bei 10% Zuwachs. Hält man bereits 20kg, so ist der neuerliche Zuwachs von 1kg nicht mehr bemerkbar, wohl aber der Zuwachs um 2kg = 10%.

Mathematisch ausgedrückt gilt:

$$ds = k \cdot \left(\frac{dW}{W} \right)$$

wobei ds den kleinsten noch merkbare Zuwachs bedeutet, dW den absoluten Zuwachs, W den bereits vorhandenen Reiz und k einen Proportionalitätsfaktor bezeichnet.

Nach Verallgemeinerung seines Gesetzes auf alle Arten physiologischer Reize, wie etwa Schmerzempfindung, Helligkeit, Lautstärke, griff Gustav Theodor Fechner[31] den Sachverhalt auf und machte ihn als Weber-Fechnersches Gesetz populär.

Mathematisch betrachtet, handelt es sich natürlich um eine Differentialgleichung, und Integration ergibt

$$s = k \cdot \ln W + C \,.$$

Mit Hilfe des niedrigsten wahrnehmbaren Reizes W_0 erhält man unter Ausschaltung der Integrationskonstante C schließlich:

$$s = k \ln\left(\frac{W}{W_0} \right) \quad \text{bzw.} \quad \frac{W}{W_0} = K \cdot e^s$$

Möchte man also bei einem höheren Reiz eine Intensitätsänderung vornehmen, die ebenso stark empfunden wird, so genügt nicht eine Änderung derselben Größe, sondern diese muss *in konstantem Verhältnis* zur vorherigen Änderung stehen.

3.3 Radioaktiver Zerfall

Der radioaktive Zerfall ist, wie dieser Abschnitt zeigen soll, ein sehr dankbares Beispiel für eine Anwendung der Exponentialfunktion. Deshalb wird hier ausführlich darauf eingegangen (Literatur für diesen Abschnitt: [37]).

Die Anzahl dN der in einem Zeitintervall dt zerfallenden Kerne ist der Gesamtzahl N der zerfallsfähigen Kerne proportional:

$$-\frac{dN}{dt} = \lambda N \equiv A \quad \text{(Grundgesetz des radioaktiven Zerfalls)}$$

Daraus erhält man durch Integration:

$$N = N_0 \cdot e^{-\lambda t} \quad \text{(Zerfallsgesetz für ein Radionuklid)}$$

N ist die nach der Zeit t noch vorhandene Anzahl zerfallsfähiger Kerne, wenn zur Zeit $t = 0$ N_0 solcher Kerne im Präparat vorhanden waren.

Der Wert λ heißt Zerfallskonstante. Die Zerfallskonstante hängt nur von der Art des Nuklids ab, hingegen aber nicht von Druck, Temperatur, elektrischen oder magnetischen Feldern, Ort oder ähnlichem.

Als Maß für die Radioaktivität A (kurz: Aktivität) wird die Zahl der pro Zeiteinheit eintretenden Kernzerfälle angegeben:

$1Ci = 3{,}7 \cdot 10^{10}\, Zerfälle / Sekunde$ (Ci ... Curie)

Die SI-Einheit[32] für die Aktivität ist 1 Becquerel ($1Bq$):

$1Bq = 1Zerfall / Sekunde$

$1Bq = 27\, pCi$

$1Ci = 3{,}7 \cdot 10^{10}\, Bq = 37GBq$

Wie wir bereits gesehen haben, gilt für die Aktivität A: $A = -\frac{dN}{dt} = \lambda N$

Wegen der Proportionalität von Atomzahl und Aktivität gilt dann auch:

$$A = A_0 \cdot e^{-\lambda t}$$

Die oben genannten Einheiten der Aktivität (Becquerel bzw. Curie) haben nichts mit der vorhandenen Stoffmenge zu tun! Vielmehr beschreiben sie, unabhängig von der Menge des Stoffes, das Ausmaß der Zerfälle und damit auch der entstehenden Strahlung.

Die spezifische Aktivität ist die Aktivität eines Stoffes pro Masseneinheit bzw. pro Mol:

$$\sigma = \frac{A}{m} \quad \text{bzw.} \quad \sigma = \frac{A}{MG}$$

Gängige Einheiten sind: mCi/g, Ci/g, Bq/kg, Bq/mol.

3.3.1 Halbwertszeit

Setzt man $N = \frac{N_0}{2}$ in das Zerfallsgesetz ein, so erhält man die Halbwertszeit τ (manchmal auch $t_{1/2}$), also jene Zeit, in der die Hälfte einer vorliegenden Zahl radioaktiver Atomkerne zerfallen ist:

$$\tau = \frac{\ln 2}{\lambda}$$

Das Zerfallsgesetz kann auch mit τ als Konstante angeschrieben werden:

$$A = A_0 \cdot e^{-\left(\frac{\ln 2}{\tau}\right) \cdot t} = A_0 \cdot 2^{-\frac{t}{\tau}}$$

3.3.2 Mittlere Lebensdauer

Die Mittlere Lebensdauer $\tau_m = \frac{1}{\lambda}$ gibt an, in welcher Zeit die Aktivität auf den Bruchteil $\frac{1}{e}$ fällt:

$$\frac{A}{A_0} = e^{-\lambda \tau_m} = e^{-1} = 0{,}3679...$$

3.3.3 Eine Anwendung: Radioaktive Altersbestimmung

Mit Hilfe von radioaktiven Nukliden[33] können Altersbestimmungen von Mineralien (Geochronologie) und archäologischen Funden durchgeführt werden, weil die radioaktiven Kerne unabhängig von allen äußeren Einflüssen in gesetzmäßiger Weise zerfallen. Wenn ein Gegenstand zur Zeit seiner Entstehung N_0 Kerne eines bestimmten Radionuklides enthält, so sind hiervon zur Zeit *t* noch $N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$ Kerne vorhanden.

N_0 kann experimentell nicht mehr ermittelt werden, wohl aber $N(t)$ und ΔN, die Anzahl der durch Zerfall im Zeitraum *t* entstandenen Tochterkerne. Es gilt:

$$\Delta N = N_0 - N(t) = N(t) \cdot \left(e^{\lambda t} - 1\right)$$

Daraus kann die seit der Entstehung des Gegenstandes vergangene Zeit ermittelt werden:

$$t = \frac{1}{\lambda} \cdot \ln \frac{\Delta N + N(t)}{N(t)}$$

3.3.4 Radiocarbon-Methode

Der bekannteste solche Weg der Altersbestimmung ist jener mittels Radiocarbon-Methode. Verwendet wird dabei das radioaktive Kohlenstoff-Nuklid ${}^{14}_{6}C$, das in der Atmosphäre durch die kosmische Strahlung aus dem Stickstoff der Luft nach der Gleichung ${}^{14}_{7}N+{}^{1}_{0}n\rightarrow{}^{14}_{6}C+{}^{1}_{1}p$ – in Fachkreisen angeschrieben als ${}^{14}_{7}N(n,p){}^{14}_{6}C$ – gebildet wird. Im Lauf der Jahrmillionen hat sich ein Gleichgewicht zwischen Zerfall und Neubildung des ${}^{14}_{6}C$ gebildet. ${}^{14}_{6}C$ liegt als ${}^{14}CO_2$ vor, wird von den Pflanzen assimiliert und gelangt über die Pflanzen in die Körper der Tiere und Menschen. Solange die Organismen leben, besteht ein Gleichgewichtszustand mit der Umgebung; stirbt das Lebewesen, wird kein weiterer Kohlenstoff mehr aufgenommen, und die spezifische Aktivität des in ihm enthaltenen ${}^{14}C$ nimmt nach dem radioaktiven Zerfallsgesetz mit der diesem Nuklid eigenen Halbwertszeit von 5730 Jahren ab.

Nach dieser Methode werden Altersbestimmungen an Holz- und Knochenresten sowie an anderen archäologischen Funden durchgeführt, deren Alter zwischen 1000 und 50000 Jahren liegt. Man misst das Verhältnis der spezifischen â-Aktivität des Probenkohlenstoffs zu derjenigen von „frischem" Kohlenstoff, z.B. frisches Holz, und errechnet daraus das Alter der Probe. Wegen der weichen â-Strahlung des ${}^{14}_{6}C$ ergeben sich messtechnische Schwierigkeiten.

Neben dieser Methode, die in praktisch alle Schulbücher in Form von Übungsbeispielen Eingang gefunden hat, sind auch weitere, weniger geläufige Methoden in Verwendung, von denen die wichtigsten hier genannt werden sollen.

3.3.5 Uran-Blei-Alter

Hierbei werden zwei verschiedene Zerfallsprozesse von Uran in Blei betrachtet, nämlich jener von ${}^{238}_{92}U$ in ${}^{206}_{82}Pb$ und jener von ${}^{235}_{92}U$ in ${}^{207}_{82}Pb$. Werden die beiden Altersbestimmungen voneinander unabhängig durchgeführt, so steigert das die Zuverlässigkeit der Ergebnisse.

3.3.6 Blei-Blei-Alter

Auf demselben Zerfallsprozess aufbauend wie das Uran-Blei-Alter, wird das Verfahren hier vereinfacht, indem man sich auf das Verhältnis der radiogen gebildeten Blei-Nuklide ${}^{206}_{82}Pb$ und ${}^{207}_{82}Pb$ stützt. Somit genügt es, das Verhältnis der beiden Nuklide massenspektrometrisch zu bestimmen, um das Alter einer Gesteinsprobe errechnen zu können.

3.3.7 Thorium-Blei-Alter

In Mineralien, die neben Uran auch Thorium enthalten, kann man sich den Zerfall von ${}^{232}Th$ in ${}^{208}Pb$ zur Altersbestimmung zu Nutze machen.

3.3.8 Kalium-Argon-Alter

Hier ist die Bestimmung des Gehalts an ${}^{40}_{19}K$ und an radiogen entstandenem ${}^{40}_{18}Ar$ erforderlich. Da der Nuklidgehalt an ${}^{40}_{19}K$ in Gesteinen und Mineralien innerhalb sehr enger Grenzen (weniger als 0,5%) konstant ist, kann die ${}^{40}_{19}K$-Konzentration der Probe auch aus deren Kaliumgehalt ermittelt werden, der sich mit dem Flammenphotometer bis auf weniger als 1% genau bestimmen lässt. Im Falle sehr kleiner Kalium-Gehalte werden massenspektrometrische Bestimmungen durchgeführt.

Zur Bestimmung des ${}^{40}_{18}Ar$-Gehaltes schmilzt man die Probe im Vakuum, bindet alle nichtedlen Gase, die mit dem Argon aus der Schmelze entweichen, chemisch ab, und untersucht das Restgas massenspektrometrisch.

3.3.9 Rubidium-Strontium-Alter

Zur Datierung Rubidium-haltiger Minerale sehr geeignet, ähnelt diese Methode stark der Kalium-Argon-Methode, mit dem Unterschied, dass das Zerfallsprodukt in diesem Falle fest und nicht gasförmig vorliegt.

3.4 Temperaturausgleich (Kaffee mit Milch und Zucker)

Bringt man einen Gegenstand einer bestimmten Temperatur in eine (kühlere) Umgebung, deren Temperatur ihrerseits als konstant angenommen wird, so kühlt sich der Gegenstand mit einer bestimmten Geschwindigkeit ab.

Nach Newton ist die Abkühlgeschwindigkeit $-\frac{dT}{t}$ proportional zur Temperaturdifferenz zwischen Körper und Umgebung, also $k(T-T_0)$. Durch Integration erhält man die Momentantemperatur des Körpers:

$$T = T_0 + (T_1 - T_0)\cdot e^{-kt}$$

Hierbei ist T_1 die Temperatur des Körpers zum Zeitpunkt $t = 0$.

Man erkennt, dass der Körper laut der oben angeschriebenen Lösung die Temperatur der Umgebung niemals erreicht.

Man stelle sich in diesem Zusammenhang die Frage, ob es klüger ist, warmen Kaffee sofort nach dem Einschenken oder erst nach einer Abkühlphase mit kalter Milch zu mischen, um schnell zur gewünschten Zieltemperatur zu gelangen. Für den Fall, dass die Mischungstemperatur gleich der Umgebungstemperatur sein soll, ist es jedenfalls gleichgültig, wann man die Milch in den Kaffee schüttet (siehe [26], Seite 260).

3.5 Geschwindigkeitsgleichungen chemischer Reaktionen

Versucht man, den Zusammenhang zwischen der Temperatur T und der Geschwindigkeit einer chemischen Reaktion, ausgedrückt durch die Geschwindigkeitskonstante k, experimentell zu ermitteln, so erhält man für die überwiegende Zahl der chemischen Reaktionen den folgenden Zusammenhang:

$$\lg K = \lg A' - \frac{B}{T}$$

beziehungsweise, nach Übergang zu natürlichen Logarithmen und einer kleinen Umformung, die bereits Arrhenius bekannte Formel

$$k = A \cdot e^{-\frac{E}{RT}}$$

Hierbei sind A, A', E und R Konstanten. A kann über die Stoßgesetze hergeleitet werden.

Das Massenwirkungsgesetz[34] liefert bei unimolekularen Reaktionen für den Fall, dass ein Reaktand in unbegrenzter Menge zur Verfügung steht (gleichbedeutend damit, dass die Reaktionsgeschwindigkeit proportional zur vorhandenen sich umwandelnden Menge des zweiten beteiligten Stoffes ist), den Zusammenhang

$$u(t) = a \cdot e^{-kt}$$

$u(t)$ bezeichnet die zur Zeit t noch nicht umgewandelte Stoffmenge. a stellt die zur Zeit $t = 0$ vorhandene Stoffmenge dar.

Die Menge des Reaktionsproduktes einer Reaktion mit zwei Ausgangsstoffen der Konzentrationen a, b ($a < b$) kann mathematisch erfasst werden:

$$\frac{dx}{dt} = k(a - x)(b - x)$$

Durch Umstellen und Integration mittels Partialbruchzerlegung ergibt sich:

$$x = \frac{ab\left(1 - e^{(a-b)kt}\right)}{b - ae^{(a-b)kt}}$$

Ein Beispiel für eine Reaktion, die diesem mathematischen Schema folgt, stellt etwa die Verseifung dar (aus Ethylacetat und Natronlauge entsteht Ethanol).

K_1 ... Konzentration des Ethylacetats

K_2 ... Konzentration der Natronlauge

Die Konzentration X des Ethanols nimmt dann nach folgendem Gesetz zu:

$$X = K_1\left(1 - e^{-cK_2 t}\right)$$

Die Formel gilt für monomolekulare Reaktionen stets; im beschriebenen Fall muss genügend Wasser zur Verfügung stehen (siehe [27], Seite 289).

3.6 Die barometrische Höhenformel

Die Messung der Flughöhe erfolgte in Flugzeugen früher unter Verwendung des Luftdruckes mittels der barometrischen Höhenformel. Hintergrund der Berechnung ist, dass der Luftdruck mit zunehmender Höhe exponentiell abnimmt. Bei 5500m Seehöhe beträgt er nur noch 50% des Wertes auf Meeresniveau (dort beträgt der Luftdruck bekanntlich 1013mbar bzw. Hectopascal).

In der wissenschaftlich korrekten Form lautet die barometrische Höhenformel:

$$h = 18400 \cdot (1 + gt) \cdot \lg \frac{p_1}{p_2}$$

Dabei bedeutet $g = 0{,}00367/°C$ den Ausdehnungskoeffizienten der Luft. Nun kann man Luftdruck p_1 in der Höhe h_1 und p_2 in der Höhe h_2 einsetzen (Einheit: N/m^2), und unter Kenntnis der Mitteltemperatur *t* der dazwischen liegenden Luftschicht ergibt sich die Höhendifferenz *h* zwischen den beiden Messpunkten.

3.7 Zinsenrechnung

Das Beispiel der Zinsenrechnung ist zwar so wichtig, dass es hier Erwähnung finden muss, allerdings gleichzeitig so omnipräsent in allen Schul- und Fachbüchern, dass hier mit den wesentlichsten Fakten und einem Verweis auf die Literatur das Auslangen gefunden werden kann.

Betrachtet man die Verzinsung eines bestimmten Kapitals, so ist nicht nur der Zinssatz relevant, sondern auch das Intervall der Verzinsung, ab dem die Zinsen zum Kapital gerechnet werden und somit auch selbst wieder Zinsen hervorrufen.

Anschaulich klar ist, dass der Zuwachs des Kapitals umso größer ist, je kleiner dieses Intervall ist – denn umso früher kommen die Zinsen ja zum Kapitalstock und werfen auch selbst Zinsen ab. Interessant und nicht mehr unmittelbar per Anschauung zugänglich ist allerdings, dass eine „unendliche“ Verkürzung dieses Intervalls hin zur Momentanverzinsung das Kapital **nicht** unendlich anwachsen lässt.

Die Funktion, die diesen Prozess beschreibt, heißt Zinseszinsformel und sieht aus wie folgt:

$$K_n = K \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

Wie schon erwähnt, bietet so gut wie jedes Lehrbuch nähere Details.

3.8 Zusammenhänge in der Elektrotechnik

3.8.1 Elektrische Widerstände

Temperaturabhängige Halbleiter-Widerstände, sogenannte *Thermistoren*, ändern ihren Widerstand, wie der Name vermuten lässt, mit der Temperatur, und zwar exponentiell:

$$R = a \cdot e^{\frac{b}{T}}$$

Dabei stellt a einen Widerstands-Wert dar, der von der Art des verwendeten Widerstandes abhängt, und b bedeutet den Temperaturkoeffizienten. Der Wert von b kann ermittelt werden, indem man die Widerstände bei zwei verschiedenen Temperaturen misst (siehe [26], Seite 261).

3.8.2 Ladung und Entladung von Kondensatoren

Bei der Berechnung von Ladung und Entladung von Kondensatoren tritt ebenfalls die Eulersche Zahl auf. Die Formel für die Kondensatorspannung lautet wie folgt:

$$U_c = U_b \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{R \cdot C}}\right)$$

Der Kondensatorstrom, der hierbei fließt, wird berechnet mittels folgender Formel:

$$I_c = \frac{U_b}{R} \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}}$$

Der Zusammenhang ist klar, da ja das Ohmsche Gesetz gilt: $U = R \cdot I$.

Die Variablen [Einheiten] sind hierbei:

U	Spannung [Volt], die an den Kondensator angelegt wird
U_b	Betriebsspannung
U_c	Spannung nach der Zeit t
I	Strom [Ampere], der durch den Kondensator fließt
I_c	Strom nach der Zeit t
t	Zeit [Sekunden]
R	Serieller Lade-Widerstand [Ohm]
C	Kapazität des Kondensators [Farad]

3.8.3 Blitzschläge

Auch im Blitzschutz tritt die Eulersche Zahl mehrmals auf, wie ein Blick in ein Handbuch für Blitzschutz [49] beweist. So wird zur Berechnung üblicherweise von einem Blitzstrom ausgegangen, der gemäß einer Exponentialfunktion ansteigt und abklingt nach folgender Formel:

$$I = I_0 \cdot \left(e^{-\frac{t}{t_1}} - e^{-\frac{t}{t_2}} \right)$$

Wobei die Variablen folgende Bedeutung haben:

I_0 Strombezugswert [Ampere]

$\boldsymbol{t}_1$ Rückenzeitkonstante des Blitzstromes [Sekunden]

$\boldsymbol{t}_2$ Stirnzeitkonstante des Blitzstromes [Sekunden]

Laut Handbuch für Blitzschutz kann für die hinsichtlich der größten Feldänderungen wichtigen Folgeblitze ein normierter Stoßstrom (Stirnzeit $T_1 = 1ms$ entsprechend $\boldsymbol{t}_2 = 0{,}405ms$, Rückenhalbwertzeit $T_2 = 50ms$ entsprechend $\boldsymbol{t}_2 = 68{,}5ms$)

$$i = \frac{\hat{i}}{0{,}96} \cdot \left(e^{-\frac{t}{68{,}5}} - e^{-\frac{t}{0{,}405}} \right) \text{ [in Ampere]}$$

mit einer Vertikalgeschwindigkeit v um $100 \cdot 10^6\ m/s$ angenommen werden. Dabei bedeutet $\hat{i}$ den Maximalwert des Blitzstromes in Ampere und t die Zeit in ms. Für nähere Details sei auf die Fachliteratur verwiesen.

3.9 Warum tritt gerade e in der Beschreibung der Natur so häufig auf?

Ist es denn so, dass e in der Beschreibung der Natur besonders häufig auftritt? Als besonders krasses Exempel soll eine Kurzmeldung aus *„Spektrum der Wissenschaft“* dienen (siehe [17]):

»Einer etwa 9000 Jahre alten Flöte haben Wissenschaftler noch Töne entlocken können – damit ist sie womöglich das älteste noch funktionsfähige Musikinstrument der Welt. Wie die Forscher berichten, entsprachen die einzelnen Töne dabei verblüffend genau unserer Tonleiter. [...] Mit Hilfe der Radiokarbonmethode ermittelten amerikanische Forscher das hohe Alter des Musikinstruments.«

In einem wissenschaftlichen Artikel, der ganze 13 Zeilen umfasst, tritt die Eulersche Zahl gleich zweimal verborgen auf: einerseits bei den Tonhöhen und andererseits bei der Altersbestimmung durch die Radiokarbonmethode. Wenn das nicht überzeugend ist?!

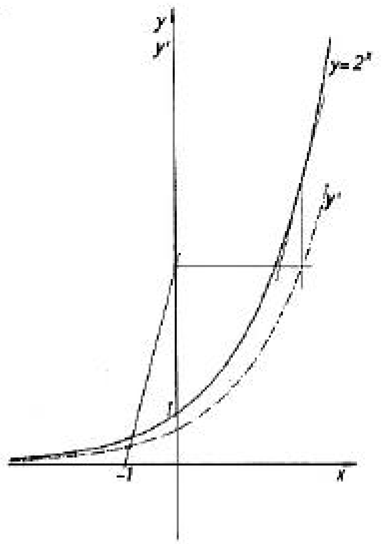
Leider ist in der Literatur nur sehr selten verständlich dargelegt, warum es gerade die *e*-Funktion ist, die dermaßen häufig in Beschreibungen der Natur auftritt. Selbst in Fachzeitschriften heißt es dann beispielsweise[35], *„Auf diese Weise lernen die Schüler, dass die Basis e nicht etwa willkürlich gewählt wurde. Die Basis e ist eine Konstante, die die*

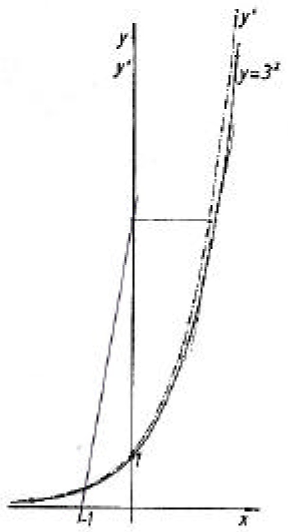
Grundlage des Gesetzes über natürliches Wachstum darstellt: $y = c \cdot e^{a \cdot x}$.“ Dabei handelt es sich allerdings eher um eine Beschreibung des Ist-Zustandes denn um eine Erklärung.

Tatsächlich sind es zwei Fakten, die ineinandergreifen und so die Überlegenheit und Omnipräsenz der Exponentialfunktion begründen.

Einerseits zeichnet sich die *e*-Funktion dadurch aus, dass sie ihrer Ableitung aufs Haar gleicht. Diese Eigenschaft erleichtert ihre Handhabbarkeit sehr. Einen Weg, diese Eigenschaft anschaulich zu machen, bietet [18]:

Es werden (etwa im Unterricht oder als Hausaufgabe) die Funktionen 2^x und 3^x grafisch dargestellt. Durch zeichnerische Differentiation werden für etwa zehn Kurvenpunkte die zugehörigen Punkte der ersten Ableitung gefunden. Im Fall von 2^x liegt die Ableitung unterhalb der Kurve, im Fall von 3^x aber oberhalb. Die Vermutung liegt nahe, dass es eine Exponentfunktion geben könnte, bei der die Ableitung mit der Stammfunktion ident ist. In dem Falle wäre *a* wohl zwischen 2 und 3 sowie wahrscheinlich dichter bei 3.





Graphische Differentiation von 2^x und 3^x

Der Ansatz $y = a^x$, $f'(x) = f(x)$ liefert: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = a^x$,

woraus sich mit $\Delta x = \dfrac{1}{n}$ nach kurzer Umformung $a = \lim\limits_{n \to \infty}\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ ergibt.

Diese Eigenschaft geht Hand in Hand mit einer zweiten Besonderheit, nämlich der Möglichkeit, jede beliebige allgemeine Exponentialfunktion auszudrücken als eine natürliche Exponentialfunktion mit einer multiplikativen Konstante.

Damit ist uns der Schlüssel in die Hand gegeben, alle Prozesse, die exponentiell verlaufen – und derer gibt es viele, wie wir bereits gesehen haben! –, mittels der natürlichen Exponentialfunktion zu beschreiben. Die Antwort auf die Frage, warum die Exponentialfunktion so oft auftritt, ist also vielschichtig zu sehen:

In einer ersten Stufe kann man beobachten, dass viele Prozesse in der Natur aus anschaulichen Gründen einer allgemeinen Exponentialfunktion folgen, ganz einfach weil ihr Wachstums- oder Zerfalls-Verhalten abhängig ist von der derzeit vorhandenen „Menge“ (z.B. an radioaktiver Substanz, an Bakterien, an Kapital, ...).

Zweitens können wir alle Exponentialfunktionen anschreiben als natürliche Exponentialfunktionen, wie im Verlauf dieser Arbeit mehrfach gezeigt wurde.

Und schließlich liegt aus Gründen der Handhabbarkeit und der Vergleichbarkeit einzelner Prozesse untereinander ein Interesse daran vor, auch tatsächlich zu *tun*, was in Punkt Zwei als Möglichkeit angeführt ist, sprich: die Beschreibungen von Wachstums- oder Zerfallsprozessen als *e*-Funktionen auszudrücken.

Damit wird anschaulich klar, was die wirklichen Hintergründe des häufigen Auftretens der Exponentialfunktion sind.

4. Didaktische Betrachtung

Die Zielsetzung dieses Abschnitts ist es, einen Überblick über das Auftreten von Logarithmen, der Eulerschen Zahl und der *e*-Funktion sowie den dazu gehörigen Übungsbeispielen im Schulunterricht insbesondere der sechsten Klasse AHS zu geben.

Als Grundlage dienen der Lehrplan Oberstufe [7] sowie die vier am häufigsten verwendeten Schulbücher der AHS-Oberstufe, 6. Klasse ([4], [6], [31], [46]), jeweils im Anschluss daran folgt ein Vergleich der verschiedenen Bücher in Bezug auf den betreffenden Themenbereich. Dabei sollen Stärken und Schwächen der einzelnen Zugänge herausgearbeitet werden. Selbstverständlich kann dieser Abschnitt nur subjektiv sein; die LeserInnen mögen sich ihr eigenes Urteil bilden!

4.1 Schulbuchvergleich: Einführung von Logarithmen

Der österreichische Lehrplan Mathematik für die Oberstufe [7] sieht in der sechsten Klasse unter dem Überbegriff „Potenzen mit ganzzahligen, rationalen und reellen Exponenten, Logarithmen“ vor:

»Logarithmen:

Definieren von Logarithmen; Formulieren und Herleiten von Rechengesetzen; Lösen von Exponentialgleichungen der Form $a^x = b$ *(etwa beim Untersuchen von Wachstumsprozessen).*

Allenfalls Kennen der (historischen) Bedeutung der Logarithmen (Logarithmentafel, Rechenstab).

(→ Grundlegende Kenntnisse und Fertigkeiten, Darstellen, Argumentieren, Produktives Arbeiten, Anwenden von Mathematik)« (Seite 82)

Nähere Informationen über die Intentionen der Lehrplan-VerfasserInnen bietet der Kommentar-Teil (Seiten 90ff). So heißt es dort etwa, *»Logarithmentabellen und logarithmische Rechenstäbe haben keine Bedeutung mehr, auf ihre historische Wichtigkeit kann allenfalls hingewiesen werden. Daher kann die Behandlung der Logarithmen auf wenige Punkte eingeschränkt werden. Es sind dies die Definition des Logarithmusbegriffes, die Herleitung von Rechengesetzen und deren Anwendung zum Lösen einfachster Exponentialgleichungen.«*

4.1.1 Szirucsek-Dinauer-Unfried-Schatzl [31]

Das Kapitel „Logarithmen“ ist bei Szirucsek et.al. [31] eingebettet zwischen die Abschnitte „Potenzen mit reellen Exponenten - Exponentialfunktionen“ und „Umkehrfunktionen“.

Der Einstieg ins Thema erfolgt mit einer Aufgabe, in der es darum geht, die Höhe zu bestimmen, in der der Luftdruck einen bestimmten Wert annimmt. Vorerst erfolgt die Lösung nur graphisch, dann durch Interpolation auch rechnerisch. In weiteren Aufgaben werden ebenfalls Lösungen, die eigentlich den Logarithmus zu ihrer Berechnung erfordern, mittels Näherung bzw. Taschenrechner abgefragt.

Erst dann wird der Begriff der *Exponentialgleichung* geprägt, und die Eigenschaften wie Monotonie und Wertemenge werden erläutert. Schließlich heißt es, als Einführung des Logarithmus:

In der Gleichung $a^x = b$ $(a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\},\ b \in \mathbb{R}^+)$ *wird jener Exponent x gesucht, mit dem die Basis a potenziert werden muss, um b zu erhalten. Man nennt diese Hochzahl x den* ***Logarithmus*** *von b zur Basis a und schreibt:*

$x = {}^a\log b$

${}^a\log b$ *ist jene Zahl, mit der die Basis a potenziert werden muss, um die Zahl b zu erhalten* $(a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\},\ b \in \mathbb{R}^+)$.

b heißt ***Logarithmand*** *oder* ***Numerus*** *(„numerus logarithmandus“).*

Soweit die Einführung des Logarithmus in diesem Schulbuch – es gibt vorerst keinerlei Hinweis auf die historische Bedeutung der Logarithmen, auf die Entwicklung im Lauf der Jahrhunderte oder darauf, dass Logarithmen eine unglaubliche Erleichterung der Rechenarbeit bedeutet haben.

Nach einigen Beispielen, in denen die Umwandlung von Gleichungen, die einen Logarithmus enthalten, geübt wird, werden weitere Eigenschaften erläutert, wie etwa:

$${}^a\log 1 = 0 \quad {}^a\log a = 1 \quad {}^a\log a^n = n \quad {}^a\log a^2 = 2 \quad {}^a\log \sqrt{2} = \frac{1}{2} \quad {}^a\log \frac{1}{a} = -a$$

Nochmals folgen Übungsaufgaben, bei denen das Erlernte gefestigt werden soll. Daran schließt ein Unterkapitel „Rechenregeln für Logarithmen“ an, in dem versucht wird, einige Grundregeln des Rechnens mit Logarithmen aus den bereits bekannten Rechenregeln für Potenzen abzuleiten:

Formuliere die Rechenregel $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ *in Worten und überlege, dass statt „Hochzahl“ auch „Logarithmus“ gesagt werden kann.*

Dieser Ansatz hat meiner Einschätzung nach einen sehr positiven Effekt, da gleich drei wesentliche Punkte berührt werden: erstens kommt es zu einer Wiederholung bereits gelernter Fakten, zweitens wird eine Vernetzung von neuem mit vorhandenem Wissen hergestellt, und drittens wird das Formulieren mathematischer Zusammenhänge in korrekter Sprache geübt, das leider sehr oft vernachlässigt wird.

Detailliert durchgeführt sind die Beweise für einige weitere Rechenregeln, die dann anschließend in einem Kasten zusammengefasst werden:

Wir fassen die logarithmischen Rechenregeln zusammen:

$$\log(x \cdot y) = \log x + \log y$$

$$\log \frac{x}{y} = \log x - \log y$$

$$\log x^r = r \cdot \log x$$

Beim Übergang zum Logarithmus wird somit jede Rechenoperation um eine Stufe erniedrigt.

Statt $\log(x \cdot y)$ *schreibt man meist kürzer* $\log xy$*, statt* $\log(x^r)$ *schreibt man* $\log x^r$.

Das Faktum, dass beim Übergang zum Logarithmus die Rechenoperationen „verwandelt“ werden, findet hier leider nur als ein einziger Satz in einem Merkkasten Eingang, den die SchülerInnen vermutlich kaum beachten werden. Würde ein historischer Bezug zum Logarithmus hergestellt, dann könnte hier ausführlicher darauf hingewiesen werden, dass es genau diese Eigenschaft war, die die Logarithmen so bedeutsam und so unentbehrlich gemacht hat!

Wiederum folgen einige Übungsbeispiele. Das nächste Unterkapitel trägt den Titel „Logarithmen mit besonderen Basen“: Hier wird die Verwendung von bestimmten, besonderen Basen argumentativ begründet, unter anderem damit, dass uns ja nicht alle Logarithmen bekannt seien. Angeführt werden insbesondere dekadische Logarithmen, mit denen auch gleich geübt wird, und sodann die natürlichen Logarithmen:

Besonders wichtig sind auch Logarithmen zur Basis e (e=2,718281828..., Eulersche Zahl), sie heißen ***natürliche Logarithmen****. Die Zahl e hat für die Beschreibung von Wachstumsprozessen große Bedeutung (siehe Kapitel V). Ein Logarithmus zur Basis e wird oft mit ln abgekürzt, es gilt:* $\ln x := {}^{e}\log x$. *ln ist die Abkürzung für „logarithmus naturalis“.*

Dies ist auch die erste Erwähnung von *e* im Buch (siehe dazu weiter unten). Natürlich folgen hierzu einige Übungs- bzw. Festigungsbeispiele, auch in Zusammenhang mit Computer-Berechnungen.

Gegen Ende des Kapitels wird erklärt, dass mit dem Taschenrechner als alleinigem Hilfsmittel sehr wohl alle Logarithmen zugänglich sind:

Man erhält den Logarithmus einer Zahl bei beliebiger Basis a, indem man den natürlichen Logarithmus dieser Zahl (am Taschenrechner ermittelbar) mit dem Faktor $\frac{1}{\ln a}$ *(auch am Taschenrechner ermittelbar) multipliziert. Man kann daher mit dem Taschenrechner Logarithmen mit beliebigen Basiszahlen ermitteln.*

Quasi als Abschluss für das Kapitel folgt noch eine Untereinheit, „Historische Bedeutung der Logarithmen“. Hier wird in kurzen Worten erklärt, dass die besondere Eigenschaft, die Rechenoperationen um eine Stufe zu erniedrigen, der Grund für die außergewöhnliche Bedeutung der Logarithmen war.

Anhand einer Logarithmentabelle soll veranschaulicht werden, wie die Rechenarbeit früher geleistet wurde. Auch der Rechenstab wird erläutert. Im Kapitel über die historische Bedeutung wird allerdings kein einziger Name genannt – es drängt sich die Frage auf, ob diese Bedeutung denn wirklich zum Tragen gekommen wäre, hätte es nicht großartige Mathematiker wie Napier, Euler und die Bernoullis gegeben...

Einigen „vermischten Aufgaben“, die das Kapitel „Logarithmen“ beschließen, geht eine Zusammenfassung der wichtigsten Lerninhalte voraus.

Im darauf folgenden großen Kapitel „Umkehrfunktionen“ kehrt auch die Logarithmus-Funktion wieder, wie nicht anders zu erwarten war. In der Untereinheit „Umkehrung von Exponentialfunktionen“ heißt es:

Wir betrachten die Exponentialfunktion mit $f(x)=2^x$. Wir wissen: Die Funktion ist monoton wachsend. Jede positive reelle Zahl ist genau einmal Funktionswert. Die Funktion ist daher umkehrbar. Der Graph der Umkehrfunktion ergibt sich durch Spiegelung an der ersten Mediane.

Wir ermitteln den Term der Umkehrfunktion rechnerisch:

$f: \quad y=2^x$

$f^{-1}: \quad x=2^y$ *(implizite Form)*

$f^{-1}: \quad y={}^2\log x$

$f^{-1}(x)={}^2\log x$ *ist der Term einer **Logarithmusfunktion**.*

In weiterer Folge wird darauf eingegangen, dass $y=\ln x$ die Umkehrfunktion zu $y=e^x$ darstellt. In Übungsbeispielen sind einige Graphen von Exponentialfunktionen und ihren Umkehrfunktionen zu zeichnen.

Die Logarithmusfunktion findet außerdem noch in einem späteren Kapitel Eingang, und zwar bei der Berechnung der Halbwertszeit einer radioaktiven Substanz.

4.1.2 Taschner [4]

Bei Taschner [4] erfolgt der Aufbau der Materie grundsätzlich anders. Hier wird zuerst mit starkem historischem Bezug die Exponentialfunktion eingeführt (siehe später), erst dann folgt ein Kapitel „Der natürliche Logarithmus". Hier heißt es gleich zu Beginn, unter der Unter-Überschrift „Die Logarithmentafel":

Statt von x auf $u=e^x$ zu schließen, kann man eine Exponentialtafel auch umgekehrt lesen: Man kann vom positiven u auf den Exponenten x, den sogenannten Logarithmus von u zurückschließen. Damit wird eine Exponentialtafel zu einer Logarithmentafel. Das Wort „Logarithmus" ist zusammengesetzt aus $\lambda o\gamma o\varsigma$ – logos, die Beziehung, und $\alpha\rho\iota\theta\mu o\varsigma$ – arithmos, die Zahl:

Der Logarithmus eines positiven u nennt jene Zahl x, die zu u in der Beziehung $u=e^x$ steht.

Weil die Beziehung mit Hilfe der natürlichen Basis e formuliert wird, spricht man genauer vom natürlichen Logarithmus und schreibt dafür ln als Abkürzung des lateinischen Wortes „logarithmus naturalis".

Die beiden Formeln $u=e^x$ und $x=\ln u$ sind gleichwertig.

Für beliebige x gilt $\ln\left(e^x\right)=x$. Für beliebige positive u gilt $e^{\ln u}=u$.

Gleich im Anschluss daran folgen „Rechengesetze für den Logarithmus". Auf eine sehr behutsame Art werden die SchülerInnen zu den einzelnen Rechengesetzen hingeführt, indem bereits bekannte Tatsachen so verknüpft werden, dass sich die Rechengesetze fast von selbst daraus ergeben. Besonders auffallend ist die sehr professionell angewandte Praxis, die mathematischen Ausdrücke nicht einfach „in der Luft hängen" zu lassen, sondern in leicht verständlichen Fließtext einzubauen. Hier werden die SchülerInnen meiner Einschätzung nach wirklich dort abgeholt, wo sie stehen.

Während die Erwähnung *aller* Rechengesetze mit ihrer Herleitung hier wohl unterbleiben kann (den Interessierten sei die Lektüre des betreffenden Buches empfohlen), soll dennoch exemplarisch die Herleitung zumindest einer Rechenregel angeführt werden:

Aus $e^0 = 1$ *folgt* $\ln 1 = 0$.

Schreibt man bei einer ganzen Zahl $n \geq 1$ *die Potenz* $u^n = u \cdot u \cdot \ldots \cdot u$ *als Produkt mit n Faktoren, folgt hieraus* $\ln(u^n) = \ln u + \ln u + \ldots + \ln u$ *mit n Summanden. Darum gilt die Regel* $\ln(u^n) = n \cdot \ln u$.

Weil $u^0 = 1$ *gilt, stimmt diese Formel auch für* $n = 0$. *Diese Regel gilt ferner für negative Exponenten, denn es ist* $\ln(u^{-n}) = \ln \frac{1}{u^n} = \ln 1 - \ln(u^n) = 0 - n \cdot \ln u = -n \cdot \ln u$.

Die Ergebnisse der Herleitungen werden jeweils in einem Merk-Kasten zusammengefasst; auch hierzu das passende Beispiel:

Der Logarithmus verwandelt Exponenten in Faktoren. Für beliebige positive u und beliebige ganzzahlige p gilt:

$\ln(u^p) = p \cdot \ln u$

Nach den Rechenregeln befasst sich Taschner auch mit der Monotonie der Logarithmus-Funktion, die ebenso aus bereits bekannten Fakten hergeleitet wird. Besonders erwähnenswert erscheint mir der Merk-Kasten, der den theoretischen Teil zu den Rechenregeln abschließt. Die Inhalte dieses Kastens kommen in dieser kompakten und meiner Einschätzung nach leicht verständlichen Form in den anderen Schulbüchern nicht vor. Es geht um die Monotonie des Logarithmus und ihre Bedeutung für Gleichungen:

Liegt die Gleichung $A = B$ *vor, in der A und B nur positive Werte annehmen, kann man hieraus die Gleichung* $\ln A = \ln B$ *bilden.*

Liegt die Gleichung $A = B$ *vor, kann man hieraus die Gleichung* $e^A = e^B$ *bilden.*

Es folgen zahlreiche Übungsbeispiele, von denen die ersten drei mit Lösungsweg ausgeführt sind. In einem der weiteren Beispiele wird die *Logarithmuskurve* skizziert (auch dieses Beispiel ist schrittweise bis zur Lösung erklärt und vermittelt somit einen neuen Lerninhalt).

Im weiteren Verlauf des Kapitels wird auch der Zusammenhang $\ln(\sqrt{u}) = \frac{1}{2} \cdot \ln u$ hergeleitet, und ebenso die allgemeine Potenz:

Für eine positive *Basis u und einen* reellen *Exponenten x legt die Formel* $u^x = e^{x \cdot \ln u}$ *die* allgemeine Potenz *fest*.

Schließlich kommt es auch noch zur Herleitung der *n*-ten Wurzel. Die Zusammenfassungen dazu lauten wie folgt:

> *Für* positive *Variable u und v besitzt die Gleichung* $v^n = u$ *für v die* eindeutig *bestimmte Lösung*
>
> $v = u^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n}\ln u}$,
>
> *welche die n*-te Wurzel *von u heißt und mit* $v = \sqrt[n]{u}$ *bezeichnet wird.*

Weiters wird eine Unterscheidung zwischen den Wurzeln aus positiven und negativen Variablen getroffen:

> *Für eine beliebige positive oder negative Variable u kann man die Kubikwurzel* $\sqrt[3]{u}$ *berechnen:*
>
> *Ist u positiv, ermittelt man sie aus der allgemeinen Potenz nach der Formel* $\sqrt[3]{u} = e^{\frac{1}{3}\ln u}$.
>
> *Ist u negativ, beachtet man die Rechenregel* $\sqrt[3]{u} = -\sqrt[3]{-u}$.

Das Folgekapitel „Wachstum und Zerfall“ ist als Erweiterungsstoff vorgesehen. Natürlich findet der Logarithmus auf diesen Seiten mehrfach Eingang. Zuerst dient er im Abschnitt über exponentielles Wachstum dem Auflösen von Gleichungen. Auch die darauf folgende Einführung in logarithmisches Wachstum kommt aus offensichtlichen Gründen nicht ohne die Logarithmus-Funktion aus. Die Behandlung von Zerfallsprozessen schließlich rundet die Anwendungen des Logarithmus in diesem Kapitel ab.

4.1.3 Bürger-Fischer-Malle-Kronfellner-Mühlgassner-Schlöglhofer [46]

Bei Bürger-Fischer-Malle et.al. [46] erfolgt die Einführung des Logarithmus-Begriffes im Kapitel „Potenzen mit reellen Exponenten und Logarithmen“. Die vorhergehenden Kapitel befassen sich mit Potenzen, beginnend bei Potenzen mit ganzzahligen Exponenten, über Potenzfunktionen; mit der Ermittlung von Näherungslösungen, der Lösbarkeit von Gleichungen der Form $x^k = c$, mit dem Wurzelbegriff und schließlich mit Potenzen mit rationalen Exponenten.

Der betreffende Abschnitt beginnt mit einer Definition:

> *Definition: Es sei* $a \in \mathbb{R}^+$, $a \neq 1$ *und* $b \in \mathbb{R}^+$.
>
> *Jene Zahl* $x \in \mathbb{R}$, *für die* $a^x = b$ *gilt, heißt* ***Logarithmus von b zur Basis a****.*
>
> *Man schreibt:* $x = {}^a\log b$
>
> *Somit gilt:* $x = {}^a\log b \quad \Leftrightarrow \quad a^x = b$

Ohne weitere Kommentare wird sofort zu Übungsbeispielen übergegangen, die offenbar den technischen Umgang mit der eben erlernten Formel schulen sollen.

Eines der Übungsbeispiele versucht einen Praxis-Bezug herzustellen:

In der Chemie stellt man den in einer Lösung vorhandenen Anteil a an Wasserstoffionen näherungsweise in der Form $a = 10^{-k}$ *(*$k \in \mathbb{N}$*) dar. Die Zahl k nennt man den pH-Wert der Lösung.*

a) Drücke den pH-Wert durch a aus!

b) Berechne den pH-Wert für $a = 0{,}01$, $a = 0{,}000001$, $a = 0{,}00000000001$*!*

Leider ist der Versuch, eine Verbindung zu einem anderen Fach herzustellen, meiner Ansicht nach völlig fehlgeschlagen. In vier Zeilen abgehandelt, bleibt hier kein Platz, um Verständnis für chemische Prozesse zu vermitteln. So wird auch mit keinem Wort darauf eingegangen, welche Bedeutung der pH-Wert[36] hat, wie man den „Anteil *a* an Wasserstoffionen" messen könnte und was die spürbaren Auswirkungen eines hohen oder niedrigen pH-Wertes sind.

In einem Unterkapitel „Rechenregeln für Logarithmen" werden diese eingeführt, und zwar als direkte Konsequenzen aus den Rechenregeln für Potenzen mit reellen Exponenten. Die Rechenregeln werden als „Satz" angeschrieben, die Beweise folgen teils vorgeführt und teils als Übungsaufgaben.

„Lösen von $a^x = b$" nennt sich der nächste Abschnitt, in dem es auch zur erstmaligen Erwähnung der Eulerschen Zahl kommt (siehe später). Es heißt hier unter anderem:

... üblicherweise haben aber Taschenrechner Tasten, mit denen man Logarithmen zur Basis 10 und zur Basis e ermitteln kann. Dabei ist e=2,718281...

Das Lösen von Gleichungen mit Hilfe der Logarithmen unter Einsatz des Taschenrechners ist auch der Inhalt einiger Übungsbeispiele. Der einzige weitere Hinweis, der gegeben wird, ist der auf die Ungenauigkeit, die auch der Taschenrechner aufweisen *muss*, da es sich bei den Logarithmen meist um irrationale Zahlen handelt.

Damit sind die Autoren bereits am Ende des regulären Stoffes – die beiden folgenden Abschnitte, die hier ebenfalls kurz beschrieben werden, sind als Erweiterungsstoff gekennzeichnet.

Technisch und kurz gefasst wird die Umrechnung von Logarithmen verschiedener Basen in einem eigenen Abschnitt abgehandelt. Die Formel zur Umrechnung wird in aller Kürze hergeleitet und in einem Satz interpretiert:

Sind die Logarithmen bezüglich einer Basis a bekannt, so kann man daraus die Logarithmen bezüglich jeder anderen Basis berechnen.

Im abschließenden Unterkapitel mit dem Titel „Logarithmisches Rechnen" finden sich die einzigen Hinweise auf historische Gegebenheiten – auch hier sind sie allerdings nur mit entsprechendem Vorwissen zu finden. Der einzige Satz, der wirklich darauf hindeutet, warum die Logarithmen je so große Bedeutung erlangen konnten, ist folgender:

Vor dem Aufkommen der Taschenrechner wurden solche Rechnungen [die Durchführung von umfangreichen Multiplikationen und Divisionen sowie die Berechnung von Wurzeln, Anm.] durch Verwendung von Logarithmen erleichtert.

Mit einer Zusammenfassung und einigen Übungsaufgaben endet das Kapitel über die Logarithmen – insgesamt werden sie in diesem Schulbuch also auf knapp über fünf Seiten behandelt.

Im weiteren Verlauf des Buches kommt der Logarithmus nochmals zur Anwendung, und zwar im Kapitel über Exponentialfunktionen, wenn es um die Berechnung unbekannter Größen im Exponenten geht. So werden anhand jeweils eines Beispieles die Halbwertszeit (radioaktiver Zerfall) und die Verdopplungszeit (Bakterienkolonie) erklärt, und natürlich kommen bei der Berechnung Logarithmen zum Einsatz.

Auch der Graph der Logarithmus-Funktion ist in diesem Buch zu finden, interessanterweise im Kapitel „Wachstums- und Abnahmevorgänge“ im Abschnitt „Graphen wichtiger Funktionen“.

4.1.4 Reichel-Müller-Laub-Hanisch [6]

Bei Reichel-Müller-Laub-Hanisch [6] folgt das Thema „Logarithmus und Logarithmusfunktion“ einem ausführlichen Kapitel über Exponentialfunktionen und einer zweiseitigen Einführung der Eulerschen Zahl (siehe später). Die Autoren begründen die Definition des Logarithmus-Begriffes schlüssig über die *»immer wiederkehrende Aufgabe der Mathematik [...], die Umkehrung von Rechenoperationen zu suchen.«*

Es wird beispielhaft dargestellt, wie etwa die Subtraktion als Umkehrung der Addition und die Division als Umkehrung der Multiplikation eingeführt wurden, und schließlich auch das Wurzelziehen als Umkehrung des Potenzierens. Um aber die Gleichung $2^x = 8$ auflösen zu können, die ja offensichtlich eindeutig ist (Blick auf den Graphen genügt), fehlt noch eine Umkehroperation, und diese wird wie folgt erklärt:

Definition: Die Lösung der Gleichung $a^x = b$ $(a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\},\ b \in \mathbb{R}^+)$ in $\mathbb{R}$ nennt man den ***Logarithmus*** *von b zur Basis a; b heißt Numerus.*

$$a^x = b \quad \Leftrightarrow \quad {}^{a}\log b \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\},\ b \in \mathbb{R}^+)$$

Dh.: Der Logarithmus von b zur Basis a ist jener Exponent, mit dem man a potenzieren muss, um b zu erhalten:

$$a^{{}^{a}\log b} = b \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\},\ b \in \mathbb{R}^+)$$

Basis^Logarithmus = Numerus

Durch einige durchgerechnete Übungsbeispiele wird den SchülerInnen nahegebracht, dass die Logarithmen zum Teil sofort genannt werden können (etwa ${}^{7}\log 49$), dass sie aber auch durch Intervallschachtelung mit beliebiger Genauigkeit eingegrenzt werden können.

Mit der Argumentation, dass man keine Intervallschachtelung für die beiden gebräuchlichsten Logarithmen benötigen würde, weil für diese Tasten am Taschenrechner vorhanden seien, werden eingeführt:

der dekadische Logarithmus (logarithmus generalis) mit der Basis 10: $\lg$ *bzw.* ${}^{10}\log$ *und der natürliche Logarithmus (logarithmus naturalis) mit der Basis e:* $\ln$ *bzw.* ${}^{e}\log$

Es erfolgt auch der Hinweis darauf, dass der Taschenrechner die Logarithmen mit Näherungsverfahren berechnet, weil diese meist irrationale Zahlen seien. Anhand eines Beispieles wird das gezeigt:

> *Beispiel: Zeige, dass* $\lg 2 = {}^{10}\log 2$ *irrational ist!*
>
> *Lösung: Wegen* $10^0 = 1$ *und* $10^1 = 10$ *und der Monotonie der Exponentialfunktion gilt:* $0 < {}^{10}\log 2 < 1$.
>
> *Angenommen,* ${}^{10}\log 2$ *wäre ein echter Bruch* $\frac{p}{q}$ *(p, q∈ℕ*, q≠1, p<q), dann würde gelten:*
>
> $$10^{\frac{p}{q}} = 2 \quad \Rightarrow \quad 10^p = 2^q \quad \Rightarrow \quad (2 \cdot 5)^p = 2^q \quad \Rightarrow \quad 2^p \cdot 5^p = 2^q \quad \Rightarrow \quad 5^p = 2^{q-p}$$
>
> *Da 5 eine ungerade Zahl ist, ist auch die Potenz* 5^p *ungerade. Da 2 eine gerade Zahl ist, ist auch die Potenz* 2^r *mit r=q-p gerade. Da keine Zahl gleichzeitig gerade und ungerade sein kann, ergibt sich ein Widerspruch. Die Annahme, dass lg2 als Bruch dargestellt werden kann, ist daher falsch.*

Im Anschluss an die Definition des Logarithmus mit dem genannten Überblick über die Arten, ihn zu berechnen, folgt ein Abschnitt über Logarithmusfunktionen.

> *Definition: Unter der* ***Logarithmusfunktion*** *versteht man die Funktion*
>
> ${}^{a}\log : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R},\ y = {}^{a}\log x \quad a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$

Es wird erklärt, dass die Logarithmusfunktion als Umkehrfunktion der Exponentialfunktion zu betrachten ist. In weiterer Folge werden die Eigenschaften der Logarithmusfunktion, wie beispielsweise die Beschränktheit, Fixpunkte, Asymptoten, aus den Eigenschaften der Exponentialfunktion hergeleitet. Das Rechnen mit Logarithmen bzw. das Umformen von logarithmischen Gleichungen wird dann mit zahlreichen Beispielen geübt.

Mit Bezugnahme auf die historischen Gegebenheiten wird das Kapitel „Rechnen mit Logarithmen“ argumentiert, in dem es heißt, „Bevor es elektronische Rechner gab, wurden die Logarithmen vor allem dazu verwendet, um das Multiplizieren und Dividieren zu vereinfachen.“ An einem Beispiel wird diese Idee dann erläutert.

Es wird anschaulich erklärt, dass der Logarithmus eines Produktes gleich der Summe der Logarithmen der Faktoren ist, und auch die Hinweise darauf, wie früher mit Logarithmen gerechnet wurde (Logarithmentafel!), fehlen nicht.

Anhand dieser Anwendung werden nun auch einige Rechenregeln angegeben, gefolgt von einem Merksatz und zwei dazu gehörenden Bemerkungen:

> *„Beim Logarithmieren einer Rechenoperation erniedrigt sich diese um eine Stufe, beim Entlogarithmieren erhöht sie sich um eine Stufe.“*
>
> *Bemerkung:*
>
> *Für das Logarithmieren von Summen und Differenzen gibt es keine analogen Formeln. Wie sollte man denn auch die Rechenoperationen 1. Stufe weiter „erniedrigen“?*

Für das Entlogarithmieren von Potenzen gibt es keine analoge Formel. Wie sollte man denn auch eine Rechenoperation 3. Stufe weiter „erhöhen"?

Anders als in den anderen Büchern, wird bei Reichel et.al. auch auf die unterschiedliche Schreibweise von $\log x^2$ und $\log^2 x$ hingewiesen.

Gekennzeichnet als *anspruchsvoller* bzw. *aufwendiger* Theorieteil, folgt dann im gleichnamigen Abschnitt eine Erläuterung der Begriffe „Charakteristik und Mantisse". Es wird fundiert dargelegt, wie die Anwendung von Logarithmen dabei helfen kann, einen Größenordnungs-Unterschied zu „messen". Auch das Rechnen mit der Logarithmentafel wird nun erklärt und geübt.

Mit derselben Kennzeichnung versehen, folgt ein Kapitel über den „Zusammenhang zwischen Logarithmen mit verschiedenen Basen", in dem die Umrechnungsformel für die Umrechnung von Logarithmen verschiedener Basen an Hand eines Beispieles hergeleitet wird. Im Anschluss finden sich zahlreiche Übungsaufgaben, die das Gelernte festigen sollen.

Natürlich sind die Logarithmen auch im Folgekapitel „Exponentialgleichungen und logarithmische Gleichungen" ständig mit dabei. Das Beispiel des radioaktiven Zerfalls dient der musterhaften Erklärung; weitere Beispiele zur Festigung folgen, darunter auch viele mit Praxisbezug.

Wie in Reichel-Schulbüchern üblich, gibt es am Ende eines Themen-Komplexes ein abschließendes Kapitel „Rückblick und Ausblick". Im Falle der Logarithmen findet sich in diesem Abschnitt auch ein historischer Rückblick auf die Entstehungsgeschichte der Logarithmen bis zurück zu Michael Stifel. Über Bürgi, Napier und Briggs wird ebenso berichtet wie über die Verwendung des Rechenstabes.

Auch die Anwendung logarithmischer Skalen, etwa bei der Darstellung des Spektrums elektromagnetischer Wellen über einen großen Wellenbereich, wird hier ausführlich besprochen. Eine Einführung in logistisches Wachstum bildet schließlich den Abschluss für den Bereich „Exponential- und Logarithmusfunktion."

4.1.5 Vergleich

Vergleicht man den Aufbau der einzelnen Schulbücher, so stellt man bereits beim Einstieg ins Thema „Logarithmus" gravierende Unterschiede fest. Über den historischen Zugang erfolgt die Annäherung bei Taschner, während Szirucsek et.al. und Bürger-Fischer-Malle et.al. mit einer Definition zu Beginn des Kapitels bereits mitten im Geschehen stehen. Interessant ist auch die Methode bei Reichel et.al., doch zumindest mit einigen Sätzen und Beispielen zu begründen, warum die Definition des Logarithmus nun erfolgt.

Betrachtet man die Herleitung von Rechengesetzen, die im Lehrplan als Lehrziel festgehalten ist, so stellt man fest, dass diese bei Sziruscek detailliert abgeleitet werden; bei Taschner erfolgt eine sehr behutsame Hinführung der Lernenden zu den Rechenregeln; bei Bürger-Fischer-Malle et.al. sind die Rechenregeln wiederum nur als direkte Konsequenzen aus dem Verhalten der Exponentialfunktion angeführt; und bei Reichel et.al. schließlich ist der Herleitung der Rechenregeln für Logarithmen ein eigenes Kapitel gewidmet.

Ein weiterer Punkt, auf den es sich durchaus lohnt das Augenmerk zu lenken, ist der Umgang der Schulbuchautoren mit der „Verwandlung" der Rechenoperationen bei Verwendung des Logarithmus. Bei Szirucsek et.al. wird nur mit einem Satz erwähnt, dass die Rechenoperationen beim Übergang zum Logarithmus um eine Stufe erniedrigt werden. Bei Taschner hingegen ist diese Tatsache einer der Haupt-Inhalte des Kapitels! Verwendet man Bürger-Fischer-Malle et.al., so ist es wohl besser, den Sachverhalt bereits vorher zu kennen, denn explizit erwähnt wird er nirgends. Reichel et.al. wiederum stellen diese Tatsache in den Vordergrund – das entsprechende Kapitel beginnt sogar mit der Aussage, „*Bevor es elektronische Rechner gab, wurden die Logarithmen vor allem dazu verwendet, um das Mulitplizieren und Dividieren zu vereinfachen.*“

Damit ist bereits der Übergang zum letzten Detail, das hier beleutet werden soll, gelungen, denn interessant sind auch die Unterschiede in der Aufarbeitung der mathematischen Geschichte durch die AutorInnen. Vorbildlichst ist hier Taschner zu nennen, dessen Einstieg in das gesamte Kapitel völlig auf dem historischen Zugang basiert. Bei Szirucsek kommt es im weiteren Verlauf des Kapitels zur Erwähnung der historischen Begebenheiten, während Bürger-Fischer-Malle von der Arbeit früherer Mathematiker offenbar weniger begeistert sind und die Hinweise auf die Geschichte auf ein absolut nötiges Minimum beschränken. Eine Besonderheit bietet das Buch von Reichel et.al., in dem es nach jedem Kapitel einen eigenen Abschnitt „Rückblick und Ausblick“ gibt. In diesem Abschnitt ist auch die Entwicklung der Logarithmen bis heute sehr deutlich verzeichnet.

4.2 Ein neuer Vorschlag zur Einführung von Logarithmen

Ein völlig neuer Ansatz zur Einführung von Logarithmen im Unterricht kommt von E. Deák [48]. Der Autor kritisiert in seiner bisher unveröffentlichten Arbeit über einen neuen didaktischen Weg zum Logarithmusbegriff vor allem, dass bei der Einführung des Logarithmus mit der *Definition* zu lasch umgegangen werde.

Denn man sollte sich, so Deák, bei der „Definition“ von ${}^{2}\log 3$ durch $3 = 2^{{}^{2}\log 3}$ zuerst fragen, ob es einen solchen Exponenten y mit $3 = 2^{y}$ überhaupt gibt und welchen Sinn ein solcher Exponent ergeben sollte. y kann ja offenbar keine ganze Zahl sein, und ein Bruch $y = \dfrac{p}{q}$ führt über $2^{\frac{p}{q}} = 3$ auf die elementar-zahlentheoretische Unmöglichkeit $2^{p} = 3^{q}$.

Während aus didaktischer Sicht also festgestellt werden muss, dass die Bedeutung für die SchülerInnen nicht ersichtlich werden kann, ist der Ausdruck, mathematisch gesehen, sehr wohl sinnerfüllt und wohl definiert, nämlich durch eine reelle Zahl, die durch einen unendlichen Dezimalbruch repräsentiert wird.

Dasselbe Problem ergibt sich bei der Rechenregel, die die eigentliche Bedeutung des Logarithmus ausmacht: $\log x + \log y = \log(xy)$. Als „Begründung“ wird zwar angeführt, dass man ja bereits Bescheid wisse über die Multiplikation von Potenzen gleicher Basis: $a^{b} \cdot a^{c} = a^{b+c}$. Allerdings geht die Erfahrung mit dieser Formel nur in den seltensten Fällen hinaus über ganzzahlige Exponenten, und es erscheint bei näherer Betrachtung gewagt, dermaßen weit zu verallgemeinern, wie es hier üblicherweise passiert.

Als Hintergründe dieser Unstimmigkeiten sieht Deák mehrere Probleme, darunter etwa das Problem des Begriffs der reellen Zahl, dessen Behandlung in der gängigen Schulmathematik, so Deák, verfehlt und mit Irreführungen belastet ist, und das Problem der Rolle der Definition im Erkenntnisvorgang, wo sich die Frage stellt, ob tatsächlich schwierige Begriffe durch Definitionen „eingeführt“ werden müssen, oder ob die Definition nicht andere Aufgaben hätte.

Deák nimmt diese Probleme nun zum Anlass, einen völlig anderen Weg einzuschlagen. Bei ihm wird der Logarithmusbegriff nicht „definiert“, sondern *aufgebaut*. Als Ausgangspunkt dazu wählt er die Funktionalgleichung

$$f(xy) = f(x) + f(y)$$

als wesentlichste Eigenschaft des Logarithmus; als Arbeitsumfeld dient der Körper der rationalen Zahlen. Damit steht der folgende Aufbau auf einem sicheren historischen Fundament. Es ist auch gut argumentierbar, dass man sich durch eine solche Funktion, wenn sie denn gefunden werden kann, den Arbeitsaufwand der Multiplikation erleichtern würde.

Als erster Schritt erfolgt die Aufstellung von Tabellen, die der geforderten Eigenschaft genügen – ist die erste dieser Tabellen gefunden, so ist quasi ein „Existenzbeweis“ gemacht. Einige einfache Beispiele wären etwa

3	7
4	9
12	16

2	0,9
3	2,7
6	3,6

2	19,6
7	72,5
14	92,1

2	0,32
3	0,47
6	0,79

5	0,70
7	0,93
35	1,63

Einfache „Minitabellen“ als Einstieg ins Thema „Logarithmen“

Die vorerst lückenhaften Tabellen werden nun genauer betrachtet unter dem Aspekt, ob sie beliebig „verdichtet“ werden können und tatsächlich Auszüge aus „vollständigen“ Rechentabellen darstellen.

Bald ergeben sich aus diesem Vorgehen weitere wichtige Aspekte, wie etwa die Forderung nach Eineindeutigkeit der Tabellen und jene nach strenger Monotonie. Denn sind diese Bedingungen nicht erfüllt, kommt es zu Ungenauigkeiten, worunter die Eindeutigkeit auch schon bei einfachen Tabellen leidet – es ist naheliegend zu vermuten, dass diese Fehler bei größeren Tabellen sehr viel häufiger auftreten würden! Die SchülerInnen können nun experimentieren und dadurch selbst herausfinden, ob die Abweichungen vielleicht vermieden werden können, wenn man in der rechten Spalte weitere Dezimalstellen anführt.

Als ein Ergebnis der Suche nach passenden Funktionen führt Deák auch die Größenordnungsfunktion $Gr(x)$ zur Basis 10 an. Bei gewissen Multiplikationen führt auch diese Funktion zu einem Fehler, wie man leicht erkennt:

Aus $10^p \leq x < 10^{p+1}$ und $10^q \leq y < 10^{q+1}$ folgt $10^{p+q} \leq xy < 10^{p+q+2}$, und daher gibt es zwei Möglichkeiten für $Gr(xy)$:

$$Gr(x) + Gr(y) \leq Gr(xy) \leq Gr(x) + Gr(y) + 1$$

Der Wert von $Gr(xy)$ ist aber natürlich wohldefiniert! Allerdings ist die Größenordnungsfunktion nicht eineindeutig. Auch wenn die Anzahl der Nachkommastellen festgesetzt ist, kommt sehr vielen Zahlen dieselbe Größenordnung zu. Die Tabelle wäre damit praktisch unbrauchbar, Abhilfe schafft man aber, wie die folgende zusammengesetzte Tabelle zeigt, relativ einfach:

x	$Gr(x)$	$Gr(2x)$	$Gr(x^2)$	$Gr(x^{10})$	$Gr(x^{100})$	$Gr(x^{1000})$
1	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	3	**3**0	**30**1
3	0	0	0	4	**4**7	**47**7
4	0	0	1	6	**6**0	**60**2
5	0	1	1	6	**6**9	**69**8
6	0	1	1	7	**7**7	**77**8
7	0	1	1	8	**8**4	**84**5
8	0	1	1	9	**9**0	**90**3
9	0	1	1	9	**9**5	**95**4
10	1	1	2	10	**10**0	**100**0

Man nehme hier nicht die wahre Größenordnung x als rechte Zahl, sondern die Größenordnung beispielsweise der 100. Potenz von x. Dadurch wird die rechte Spalte gestreckt, Eineindeutigkeit erreicht und eine Verdichtung der linken Spalte ermöglicht.

Beim Aufstellen dieser Tabellen mit $Gr\left(x^{10^n}\right)$ stellt man fest, dass die Ergebnisse nicht voneinander unabhängig sind – vielmehr kommt jeweils nur eine weitere Stelle dazu (die **fetten** Markierungen in der Tabelle oben zeigen die gleichbleibenden Ziffern an). Diese Eigenschaft nennen wir *Stabilität der Ziffern* – sie ist für den Aufbau der Logarithmen enorm wichtig und kann allgemein so beschrieben werden:

$$10^k \leq x^{10^n} < 10^{k+1} \qquad \Rightarrow \qquad 10^{10^k} \leq x^{10^{n+1}} < 10^{10k+10}$$

$$10 \cdot Gr\left(x^{10^n}\right) \leq Gr\left(x^{10^{n+1}}\right) < 10 \cdot Gr\left(x^{10^n}\right) + 10$$

Weil auf diese Art die Werte sehr rasch anwachsen, wäre die Tabelle allerdings bald unbrauchbar. Abhilfe kann man durch eine gewisse *Normierung* schaffen, indem man die $Gr\left(x^{10^n}\right)$-Werte durch die entsprechenden $\frac{1}{10^n}\cdot Gr\left(x^{10^n}\right)$-Werte ersetzt. Der mathematische Inhalt bleibt derselbe und die Tabelle wird handlicher – es wird bloß das Komma versetzt:

x	$Gr\left(x^{100}\right)$	$\frac{1}{100}\cdot Gr\left(x^{100}\right)$	$Gr\left(x^{10000}\right)$	$\frac{1}{10000}\cdot Gr\left(x^{10000}\right)$
1	**0**	**0,00**	**0**	**0,00**00
2	**30**	**0,30**	**30**10	**0,30**10
3	**47**	**0,47**	**47**71	**0,47**71
4	**60**	**0,60**	**60**20	**0,60**20
5	**69**	**0,69**	**69**89	**0,69**89
6	**77**	**0,77**	**77**81	**0,77**81
7	**84**	**0,84**	**84**50	**0,84**50
8	**90**	**0,90**	**90**30	**0,90**30
9	**95**	**0,95**	**95**42	**0,95**42
10	**100**	**1,00**	**100**00	**1,00**00
11	**104**	**1,04**	**104**13	**1,04**13

Interessanterweise stimmen die Angaben aus diesen selbst erstellten n-stelligen Tabellen mit den n-stelligen Abschnitten der entsprechenden Dezimalbrüche aus den „offiziellen“ Logarithmentafeln überein. Daher erscheint es natürlich, die n-stelligen Tabellen *n-stellige Logarithmentafeln* zu nennen und die Bezeichnungen *Numerus* und *n-stelliger Logarithmus* zu übernehmen. Die Definition des n-stelligen Logarithmus ist

$$^{n}\log x = \frac{1}{10^n}\cdot Gr\left(x^{10^n}\right) \quad (n = 0, 1, 2, ...; \quad x > 1)$$

Betont wird allerdings, dass es sich bei dem hier aufgebauten Logarithmus-Begriff keineswegs um den Logarithmus handelt, wie wir ihn üblicherweise kennen, sondern um einen selbständigen elementar-arithmetischen Begriff. Vorausgesetzt sind etwa natürliche Exponenten, sodass auch die Logarithmen-Tabelle von den SchülerInnen nicht nur leicht überprüft, sondern beinahe ebenso leicht erzeugt werden kann.

Im weiteren Verlauf von Deáks Ausführungen kommt es auch zur Definition des Logarithmus-Begriffs, denn es war ja nicht die Definition an sich Kern seiner Kritik, sondern der Zeitpunkt ihrer Verwendung. Auf sehr erkenntnis-bezogenen Wegen führt der Autor die Lernenden bis zur Erkenntnis, dass $x = a^{{}^{a}\log x}$ – nun ist diese Aussage allerdings nicht Beginn, sondern Endpunkt eines Bildungsweges!

Insgesamt darf dieser Weg als sehr vielversprechend und zukunftsorientiert gelten, und es bleibt zu hoffen, dass er bald Eingang in die Lehrbücher finden wird.

4.3 Schulbuchvergleich: Einführung von e, Exponentialfunktion

Der Lehrplan [7] sieht in der sechsten Klasse unter dem Überbegriff „Potenzen mit ganzzahligen, rationalen und reellen Exponenten, Logarithmen“ laut Kommentar vor (Seite 100):

»Der allgemeinen Gepflogenheit entsprechend kann es auch zweckmäßig sein, die Basis e und die natürlichen Logarithmen einzuführen. Man kann dabei allenfalls nur mit einem groben Näherungswert für e arbeiten, weil die besondere Bedeutung dieser Basis erst später – bei der Behandlung einer Differentialgleichung – klargemacht werden kann.«

4.3.1 Reichel-Müller-Laub-Hanisch [6]

Bei Reichel et.al. [6] wird die Eulersche Zahl im Rahmen eines großen Kapitels über Exponential- und Logarithmusfunktion eingeführt, und zwar, nach einigen allgemeinen Erklärungen über Exponentialfunktionen, über die Verzinsungs-Problematik.

Am Beginn der Überlegungen steht die jährliche Verzinsung eines Kapitals. Sodann wird berechnet, wie viel mehr an Zinsen man bekommen kann, wenn man das Kapital nach einem halben Jahr abhebt und wieder anlegt.

Bei einem hypothetischen Zinssatz von p=100% und einem Kapital von K erhält man bei monatlicher Verzinsung bereits 2,613K.

Überraschend klein ist dann der Unterschied zur täglichen Verzinsung: hier kann man nach einem Jahr 2,7145K abheben.

Darauf baut die folgende Vermutung auf, dass der Wert auch dann nicht mehr sehr viel weiter steigt, wenn man die Ein- und Auszahlungen noch öfter oder schließlich sogar „augenblicklich“, also stetig, vornimmt. Dieser Sachverhalt wird sodann mathematisch ausgedrückt:

$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ *soll existieren und wir wollen seine Größe ermitteln.*

Auf den Existenzbeweis (der sich zusammensetzen würde aus dem Beweis, dass die Folge monoton wächst und dass sie nach oben beschränkt ist) wird bei Reichel et.al. verzichtet; die Bestimmung der Größe des oben genannten Grenzwertes erfolgt mit dem Taschenrechner durch Einsetzen immer größerer Zahlen.

Achtung: erwähnenswert ist in diesem Zusammenhang auch, dass man mit dem Verfahren rasch an die Grenzen der Rechengenauigkeit des Taschenrechners stößt, wenn man n immer größer und schließlich größer als (bei den meisten Geräten) 10^{10} wählt. Das kann ein guter Ansatzpunkt sein, mit den SchülerInnen über Rundung und Genauigkeit zu sprechen.

Schließlich wird definiert:

Definition: Die Zahl $e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = 2{,}718281828459045\ldots$ *heißt EULERsche Zahl. Sie gibt an, auf das Wievielfache ein Kapital bei einem jährlichen Zinssatz von 100% bei stetiger Verzinsung in einem Jahr anwächst.*

Meines Erachtens ist diese Definition auf mehreren Gründen unbefriedigend. Einerseits schränkt sie den Blickwinkel bei der Betrachtung der Eulerschen Zahl schon von vornherein ein, ohne dass das nötig wäre – die Aussage, dass diese Zahl angibt, wie stark das Kapital anwächst, ist zwar korrekt, dennoch sollte sie nicht als Teil der Definition firmieren. Andererseits geht die Herleitung leider überhaupt nicht auf die historischen Gegebenheiten und die Geschichte dieser Zahl ein.

Es erfolgt nun noch ein Verweis auf höhere Klassen:

> *Aus Gründen, auf die wir erst in der 8. Klasse eingehen, ist die Eulersche Zahl e die am häufigsten verwendete Basis von Exponentialfunktionen. Die Funktion e ist daher auf jedem wissenschaftlichen Taschenrechner implementiert [...].*

Einige Übungsbeispiele zur Exponentialfunktion folgen.

4.3.2 Taschner [4]

Bei Taschner erfolgt die Einführung von e über den historischen Zugang: aufbauend auf einem Kapitel über Potenzen mit ganzzahligen Exponenten, erläutert Taschner die Entwicklung der entsprechenden Ideen im richtigen Zeitablauf. Zuerst wird die Tafel des deutschen Pastors und Mathematikers Michael Stifel[37] vorgestellt, in der die Potenzen von 1,1 auf eine Nachkommastelle genau angeführt sind. An Hand dieses Beispiels wird das Prinzip einer Exponentialtafel erklärt: Zu jeder in einer Zeile genannten Hochzahl *n* kann in der zweiten Zeile die entsprechende Potenz $1{,}1^n$ mit *n* als Exponent abgelesen werden.

Es wird erläutert, dass die Tabelle an jener Stelle abgebrochen werden kann, wo die Potenz den Wert 10 erreicht hat, da man alle höheren Potenzen auf die niedrigeren Tabellenwerte zurückführen kann, wie exemplarisch gezeigt wird:

$$1{,}1^{25} = 1{,}1^{1+24} = 1{,}1^{1} \cdot 1{,}1^{24} = 1{,}1 \cdot 10^{1} = 11$$
$$1{,}1^{37} = 1{,}1^{13+24} = 1{,}1^{13} \cdot 1{,}1^{24} = 3{,}5 \cdot 10^{1} = 35$$
$$1{,}1^{91} = 1{,}1^{19+24\cdot 3} = 1{,}1^{19} \cdot \left(1{,}1^{24}\right)^{3} = 6{,}1 \cdot 10^{3} = 6100$$

Auch die Berechnung von Potenzen mit negativem Exponenten wird analog erklärt:

$$1{,}1^{-1} = 1{,}1^{23-24} = 1{,}1^{23} \cdot 1{,}1^{-24} = 9{,}0 \cdot 10^{-1} = 0{,}9$$
$$1{,}1^{-7} = 1{,}1^{17-24} = 1{,}1^{17} \cdot 1{,}1^{-24} = 5{,}1 \cdot 10^{-1} = 0{,}51$$
$$1{,}1^{-67} = 1{,}1^{5-24\cdot 3} = 1{,}1^{5} \cdot \left(1{,}1^{24}\right)^{-3} = 1{,}6 \cdot 10^{-3} = 0{,}0016$$

Im Anschluss wird begründet, warum man mit dieser einfachen Tafel nicht das Auslangen finden konnte bzw. kann, und schrittweise erfolgt die Hinführung zur bürgischen Exponentialtafel. Das Folgekapitel *"Die natürliche Basis"* ist dann schließlich *e* gewidmet.

Der Einstieg in das Kapitel erfolgt über die Exponentialtafel von Napier und über die „Gesetzmäßigkeit“, die Bürgi übersah, dass nämlich (auf drei Nachkommastellen gerundet) gilt:

$$1{,}0001^{10} = 1{,}001005 = 1{,}001$$

$$1{,}0001^{100} = 1{,}0100497 = 1{,}01$$

$$1{,}0001^{1000} = 1{,}1051654 = 1{,}1$$

Taschner führt nun hin zur naheliegenden nächsten Zahl, die es zu betrachten gilt:

$$1{,}0001^{10000} = 2{,}7181459$$

Es wird erläutert, dass Napier auch andere Exponentialtafeln betrachtete und in allen eine entsprechende Zahl fand, bis er schließlich bemerkte, dass es sich um ein und dieselbe Zahl in unterschiedlicher Genauigkeit handelt.

Diese nennt er – im Unterschied zu den willkürlich gewählten Basen 1,1; 1,01; 1,001 oder 1,0001 – die natürliche Basis aller Exponentialtafeln und bezeichnet sie mit dem Buchstaben *e*.

Detailliert wird berichtet, wie Napier den Ehrgeiz entwickelte, *e* möglichst genau zu berechnen – schließlich folgt ein Definitions-Kasten, der die Eulersche Zahl endgültig einführt:

Die auf sechs Nachkommastellen genau berechnete Größe $e = 2{,}718282$ *heißt die natürliche Basis, welche allen Exponentialtafeln zugrunde liegt.*

Unter dem Titel „Exponentialzahlen als Exponenten“ folgen weitere historische Details und Erklärungen, unter anderem bereits ein sehr interessanter Merkkasten zur Exponentialfunktion:

Die Potenzen in der Folge $1{,}1^{10\cdot x}$, $1{,}01^{100\cdot x}$, $1{,}001^{1000\cdot x}$, $1{,}0001^{10000x}$, ..., $1{,}0000001^{10000000x}$, ... stellen der Reihe nach immer genauere Näherungen an e^x dar. Dabei bezeichnet x eine beliebige Dezimalzahl (und die obige Folge ist erst von jener Potenz an zu betrachten, ab der die Hochzahl ganzzahlig ist).

Gefolgt werden diese Erläuterungen von zahlreichen Übungsbeispielen. Nach der Einführung des Logarithmus in einem eigenen Kapitel folgt ein Abschnitt über „Wachstum und Zerfall“, in dem die *e*-Funktion wieder eine wichtige Rolle spielt.

Detailliert werden lineares, exponentielles, logarithmisches und polynomiales Wachstum behandelt, anschließend folgt ein Abschnitt über Zerfallskurven. Wiederum sind zahlreiche Übungsbeispiele angeführt.

Ein als Erweiterungsstoff gekennzeichnetes Kapitel über „Zinsen und Zinseszinsen“ rundet den großen Abschnitt „Potenz, Exponent, Logarithmus“ mit detaillierten Ausführungen dieser Anwendung und natürlich mit zahlreichen Beispielen ab.

4.3.3 Szirucsek-Dinauer-Unfried-Schatzl [31]

Vor das Kapitel „Exponentialfunktionen • Logarithmen“ stellt das Autorenteam einen eigenen Abschnitt „Potenzen und Wurzeln“, sodass das Wissen über Potenzen mit natürlichen, ganzzahligen und rationalen Exponenten vorausgesetzt werden kann. Auch Potenzfunktionen werden in diesem Kapitel bereits erklärt.

Der Einstieg in den Themenbereich „Exponentialfunktionen • Logarithmen“ erfolgt über den Versuch einer Festlegung von $2^{\sqrt{5}}$ - die Intervallschachtelung für diesen Wert wird ausführlich behandelt und begründet und in weiterer Folge verallgemeinert für die allgemeine Potenz a^x.

Der folgende Unterabschnitt „Exponentialfunktionen“ behandelt die allgemeine Exponentialfunktion $f(x)=a^x \quad (a>0)$ sehr ausführlich. Anhand von Beispielen werden die Eigenschaften der Exponentialfunktion, wie etwa Definitionsmenge, Wertemenge, Monotonie, Symmetrie, Krümmung, Asymptoten, u.a. beleuchtet und nähergebracht.

Der Zugang zur allgemeinen Exponentialfunktion erfolgt ausschließlich über den mathematischen Aspekt bzw. über die Formelsprache. Auch die mathematischen Eigenschaften werden nicht verbal ausformuliert, sondern nur in mathematischer Schreibweise genannt. Erst am Ende des Abschnitts folgen zwei Beispiele, die nicht rein mathematischer Natur sind.

Die wichtigsten Inhalte des Kapitels werden am Ende in einem Kasten, der farblich hervorgehoben ist, zusammengefasst.

Im folgenden Abschnitt über Logarithmen (→ Abschnitt 4.1.1) kommt es dann schließlich zur Einführung von *e*, in Zusammenhang mit verschiedenen wichtigen bzw. gängigen Basen für Logarithmen (Seite 138):

> *Besonders wichtig sind auch Logarithmen zur Basis e (e=2,718281828..., Eulersche Zahl), sie heißen* **natürliche Logarithmen**. *Die Zahl e hat für die Beschreibung von Wachstumsprozessen große Bedeutung (siehe Kapitel V). Ein Logarithmus zur Basis e wird oft mit* $\ln$ *abgekürzt, es gilt:* $\ln x := {}^{e}\log x$. $\ln$ *ist die Abkürzung für „logarithmus naturalis“.*

Dieser Aussage folgen zwei Übungsaufgaben. Ein als „Erweiterungsstoff“ markierter Abschnitt beschäftigt sich mit der historischen Bedeutung von Logarithmen.

Erst ca. 25 Seiten weiter taucht die Eulersche Zahl „versteckt“ wieder auf, und zwar in einem sehr umfangreichen Kapitel, das sich mit *Wachstumsprozessen* beschäftigt. Zuerst wird das lineare Wachstum behandelt, sodann das diskrete exponentielle Wachstum sowie geometrische Folgen. Erst dann, bei „Kontinuierliches exponentielles Wachstum“, tritt auch *e* wieder auf:

Ausgehend von einem Beispiel mit *Augenblicksverzinsung (stetiger Verzinsung)* ergibt sich Folgendes (Seite 169):

$$K_n = K\cdot\left(1+\frac{p}{k\cdot 100}\right)^{k\cdot n} = K\cdot\left(1+\frac{p}{k\cdot 100}\right)^{\frac{k\cdot 100\cdot p\cdot n}{p\cdot 100}} = K\cdot\left[\left(1+\frac{p}{k\cdot 100}\right)^{\frac{k\cdot 100}{p}}\right]^{\frac{p\cdot n}{100}}$$

Wir setzen $\frac{p}{k\cdot 100}=h$, *dann ist* $K_n = K\cdot\left[(1+h)^{\frac{1}{h}}\right]^{\frac{p\cdot n}{100}}$. *Der Exponent* $\frac{p\cdot n}{100}$ *hängt nicht von der Anzahl k der Verzinsungen innerhalb eines Jahres ab. Für* $k\to\infty$ *nähert sich h dem Wert 0. Was geschieht mit dem Ausdruck* $(1+h)^{\frac{1}{h}}$, *wenn h eine Nullfolge durchläuft? Wählen wir als Nullfolge* $\langle h_n\rangle=\left\langle\frac{1}{n}\right\rangle$, *dann ist der Grenzwert der Folge* $\langle e_n\rangle=\left\langle\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\rangle$ *die Eulersche Zahl* $e\approx 2{,}718281828$. *e ist eine irrationale Zahl.*

Hier tritt *e* also zum zweiten Mal auf. Leider wird vorerst wieder nicht auf die Besonderheiten dieser Zahl eingegangen, sondern sie wird einfach trocken präsentiert.

Nach der Herleitung der Formel für stetige Verzinsung fassen die Autoren in einem hervorgehobenen Merksatz zusammen (Seite 169):

Kontinuierliche exponentielle Prozesse werden meist durch Funktionen mit der Basis e beschrieben. Zur erforderlichen Berechnung von e besitzen die Rechner geeignete Tasten.

Im Anschluss wird die Konvergenz der Folge $\langle e_n\rangle$ im Rahmen eines Übungsbeispieles näher betrachtet. Einige weitere Übungsbeispiele befassen sich mit exponentiellem Wachstum (die Beispiele umfassen stetige Verzinsung, Bakterienwachstum, Wachstum eines Waldbestands, radioaktiven Zerfall samt Berechnung der Halbwertszeit, Absorptionsgesetz; außerdem Erstellen von Computerprogrammen für diese Berechnungen).

Darauf folgt ein Kasten mit einer Zusammenfassung der wichtigsten Punkte des Kapitels, die leider nur sehr spärlich ausfällt:

Zusammenfassung

Exponentielles Wachstum wird durch Exponentialfunktionen beschrieben:

$K_n = K\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right)^n$ *Zinseszinsformel*

$K_n = K\cdot e^{\frac{p\cdot n}{100}}$ *Augenblicksverzinsung*

$f(t)=f(0)\cdot e^{kt}$

Beim exponentiellen Wachstum ist die mittlere prozentuelle Änderungsrate konstant.

Diskrete exponentielle Prozesse werden durch geometrische Folgen beschrieben. In einer geometrischen Folge ist der Quotient q aufeinanderfolgender Glieder konstant. Es gilt:

$a_{n+1} = a_n \cdot q \qquad a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \qquad s_n = \frac{a_1\left(q^n - 1\right)}{q-1}$

$\sum_{i=1}^{\infty} a_i = \frac{a_1}{q-1}$ *für* $0 < q < 1$ *bzw. für* $|q| < 1$

In den folgenden *vermischten Aufgaben* werden unter anderem noch das Zerfallsgesetz und einige weitere Übungen zu Zinsen und Wachstum geboten. Auch die barometrische Höhenformel und die Ladung eines Kondensators finden hier Eingang.

Interessantes hat das Erweiterungs-Kapitel *Andere Wachstumsprozesse – Modelle und Wirklichkeit* zu bieten: hier werden vernetzte Aufgaben zum linearen oder exponentiellen Wachstum genauso vorgestellt wie einige Modelle für begrenztes Wachstum und die Erstellung von entsprechenden Computerprogrammen.

4.3.4 Bürger-Fischer-Malle-Kronfellner-Mühlgassner-Schlöglhofer [46]

Bei Bürger-Fischer-Malle et.al. [46] ist die Erwähnung von *e* (leider kann man in diesem Zusammenhang nicht von einer „Einführung“ sprechen) eingebettet in das Kapitel „Näherungsprozesse, Wurzeln, Logarithmen“. Während einfache Potenzfunktionen im vorhergehenden Kapitel besprochen wurden und Wachstums- sowie Abnahmevorgänge erst ein Kapitel später an die Reihe kommen, geht es hier nun zuerst um das näherungsweise Lösen von Gleichungen. Darauf aufbauend, wird die Lösbarkeit der Gleichung $x^k = c$ besprochen.

Gründlich werden der Begriff der Wurzel und das Wurzelziehen behandelt; schließlich erfolgt der Übergang zu Potenzen mit rationalen Exponenten. Dieser Abschnitt bietet die Grundlage für die folgende Erklärung von Potenzen mit reellen Exponenten und Logarithmen.

Hier kommt es zur ersten Erwähnung von Rechenregeln für die allgemeine Exponentialfunktion:

Satz: $\forall a, b \in \mathbb{R}^+, \ \forall x, y \in \mathbb{R}$*:*

(1) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ *(2)* $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$ *(3)* $\left(a^x\right)^y = a^{x \cdot y}$

Ebenso wird die Monotonie als Eigenschaft erwähnt. Enttäuscht wird, wer hier auf eine Begründung oder gar einen Beweis wartet. Es heißt ganz einfach lapidar:

Beweise dieser Sätze führen wir nicht durch.

Aufbauend auf diesem Wissen über allgemeine Exponentialfunktionen (die in diesem Buch nie so genannt werden, sondern stets „Potenzen mit reellen Exponenten“), folgt nun die Einführung der Logarithmen (siehe oben).

Im Abschnitt über Logarithmen heißt es nun,

> *Die meisten Taschenrechner haben zwar keine Taste, mit der man [...] allgemein* ${}^{2}\log x$ *ermitteln kann, üblicherweise haben aber Taschenrechner Tasten, mit denen man Logarithmen zur Basis 10 und zur Basis e ermitteln kann. Dabei ist e=2,718281...*
>
> ${}^{10}\log = \log \qquad {}^{e}\log = \ln$
>
> *Das Zeichen ln ist eine Abkürzung für „logarithmus naturalis“, also für „natürlicher Logarithmus“.*

Erstaunlicherweise ist das alles, was dieses Schulbuch zur Eulerschen Zahl zu sagen weiß – ja, sie wird nicht einmal als solche vorgestellt.

Im Folgekapitel geht es um „Wachstums- und Abnahmevorgänge“, und begonnen wird es mit „Exponentialfunktionen“ – hier wird definiert wie folgt:

> *Definition: Eine reelle Funktion f mit* $f(x) = c \cdot a^{x}$ *(*$c \in \mathbb{R}$*,* $a \in \mathbb{R}^{+}$*) heißt Exponentialfunktion.*

Einige Eigenschaften der Exponentialfunktion werden erwähnt, bevor „Exponentielle Prozesse“ besprochen werden – all das ohne Verwendung der Eulerschen Zahl. Beispiele wie der radioaktive Zerfall oder auch das Wachstum von Bakterienkulturen werden auf Basis der allgemeinen Exponentialfunktion durchbesprochen. Selbst zur „Berechnung unbekannter Größen im Exponenten“ wird die „klassische“ Exponentialfunktion nicht herangezogen, wie folgendes Beispiel verdeutlichen soll:

> *Eine radioaktive Substanz zerfalle nach dem Gesetz* $N(t) = N_0 \cdot 0{,}8^{t}$ *(t in Jahren). Wie lange dauert es, bis nur noch die Hälfte der Substanz übrig ist?*
>
> *Lösung: Es ist jener Zeitpunkt t gesucht, für den gilt:*
>
> $$N(t) = N_0 \cdot 0{,}8^{t} = 0{,}5 \cdot N_0 \qquad \Leftrightarrow \qquad 0{,}8^{t} = 0{,}5$$
>
> *Wir gehen wie [früher, Anm.] [...] vor:*
>
> $$0{,}8^{t} = 0{,}5 \quad \Leftrightarrow \quad \log 0{,}8^{t} = \log 0{,}5 \quad \Leftrightarrow \quad t \cdot \log 0{,}8 = \log 0{,}5 \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{\log 0{,}5}{\log 0{,}8}$$
>
> *Mit dem Taschenrechner erhält man:* $t \approx 3{,}1$
>
> *Ergebnis: Nach ca. 3,1 Jahren ist von der Substanz nur mehr die Hälfte übrig.*
>
> *Bemerkung: Jene Zeit, in der die Hälfte einer radioaktiven Substanz zerfällt, nennt man Halbwertszeit.*

Einigen Übungsbeispielen folgt ein weiterer Abschnitt, „Natürliche Exponentialfunktion“. Wer nun eine etwas genauere Erklärung für das Auftreten der Eulerschen Zahl erwartet, geht fehl, denn es heißt hier nur:

In den bisherigen Aufgaben sind Exponentialfunktionen mit verschiedenen Basen aufgetreten. In den Naturwissenschaften ist es üblich, alle Exponentialfunktionen mit einer einheitlichen Basis darzustellen, nämlich mit der Basis e=2,71... (Der tiefere Grund, warum gerade diese Zahl gewählt wird, kann erst in MATHEMATIK OBERSTUFE 4 erklärt werden.) Exponentialfunktionen mit der Basis e nennt man natürliche Exponentialfunktionen.

Nun wird letztendlich darauf eingegangen, dass *alle* Exponentialfunktionen als natürliche Exponentialfunktionen angeschrieben werden können, und es folgt die Erklärung:

Es sei $N(t) = N_0 \cdot a^t$. *Dann gibt es eine Zahl* λ *mit* $a = e^{\lambda}$, *nämlich* $\lambda = \ln a$. *Daher kann man schreiben:*

$$N(t) = N_0 \cdot a^t = N_0 \cdot \left(e^{\lambda}\right)^t = N_0 \cdot e^{\lambda t}$$

Mit Übungsbeispielen im Ausmaß einer Seite wird das Kapitel abgeschlossen, es gibt keine weiteren Vorkommen von *e* in diesem Schulbuch.

4.3.5 Vergleich

Auch bei diesem Thema zeigt sich der völlig unterschiedliche Zugang der AutorInnen. Bei Reichel et.al. ist die Einführung der Eulerschen Zahl eine Konsequenz der Zinseszins-Formel, so wie es auch historisch nicht von der Hand zu weisen ist. Taschner hingegen begibt sich noch tiefer in die mathematische Geschichte, um von dort aus die Erkundung der Exponentialtafeln und schließlich die Entdeckung der Eulerschen Zahl aufzurollen.

Bei Szirucsek kommt es erst im Kapitel über Logarithmen zur Erwähnung der Eulerschen Zahl; und bei Bürger-Fischer-Malle schließlich wird die Zahl *e* nur mit ihrem Wert, nicht aber mit ihrem Namen genannt, von der Bedeutung ganz zu schweigen.

4.4 Schulbuchvergleich: Übungsbeispiele zu e und Logarithmen

Der Kommentar zum Lehrplan der sechsten Klasse [7] führt unter dem Titel „Bemerkungen zur Exponentialfunktion" Folgendes an (Seiten 117-120):

Viele Vorgänge in außermathematischen Situationen [...] lassen sich [...] durch Exponentialfunktionen näherungsweise beschreiben. [...] Beispiele, die sich zur Bearbeitung eignen:

- *Wachstumsvorgänge: Vermehrung von Bakterien – Vermehrung von Insekten – Bevölkerungswachstum – Zinseszinsrechung*
- *Abnahme- und Zerfallsvorgänge: Radioaktiver Zerfall – Absorption von Licht beim Durchgang durch eine lichtdurchlässige Schicht – Abnahme des Luftdruckes mit der Höhe – Prozentuelle Abschreibung (im Gegensatz zur linearen) – Entladung eines Kondensators – Abkühlung eines Körpers*

Es sollen bei dieser Gelegenheit auch Probleme der Modellbildung aufgezeigt werden. [...]

4.4.1 Reichel-Müller-Laub-Hanisch [6]

Bereits in Zusammenhang mit der allgemeinen Exponentialfunktion am Beginn des Abschnittes „Exponential- und Logarithmusfunktion“ finden sich bei Reichel et.al. praxisnahe Beispiele, die den im Lehrplan angeführten Zielen vollauf genügen. Darunter sind die Berechnung eines Waldbestandes nach Angabe des jährlichen Zuwachses; das Wachstum von Bakterienkulturen sowie mehrere Aufgaben zum Bevölkerungswachstum.

Nach Einführung der Eulerschen Zahl als Basis der natürlichen Exponentialfunktion, die wie erwähnt an Hand des Zinsenwachstums erfolgt, gibt es hierzu zahlreiche Beispiele. Neben Aufgaben, die darauf abzielen, den Umgang mit der *e*-Funktion zu schulen, finden sich auch hier wieder Praxisbezüge, darunter mehrere Beispiele zum Temperaturausgleich. Eines sei hier angeführt:

Frau Süß erhält eine Tasse mit besonders heißem Tee (90°C) serviert. Da sie ihn gezuckert liebt, möchte sie zwei Stück Zucker hineinwerfen. Dadurch wird der Tee, vor allem durch den Lösungsvorgang, um etwa 15°C abgekühlt. Frau Süß liebt eine Trinktemperatur von etwa 35°C. Ist es nun klüger, den Zucker sofort hineinzuwerfen oder abzuwarten, bis der Tee auf eine Temperatur von 50°C abgekühlt ist und erst dann zu zuckern? Verwende die Formel [aus einer früheren Aufgabe, Anm.] und zeichne die Graphen für beide Vorgänge!

Die Übungsbeispiele zum Logarithmus bestehen in erster Linie aus Festigungs-Übungen zur erlernten Rechenmethode. Durch zahlreiche Umformungen und Berechnungen wird hier eine gewisse Routine für den Umgang vermittelt.

Nach der Erläuterung von Logarithmen verschiedener Basen folgen zahlreiche weitere Beispiele in folgendem Stil:

Stelle die folgenden Ausdrücke als Logarithmus eines einzigen Terms dar! Vereinfache anschließend – wenn möglich – diesen Term mit Hilfe der Potenzrechenregeln!

a) $\log 2 - \log a + \frac{1}{2}\log b$

b) $\log x + 2\log y - \frac{2}{3}\log z$

c) $\log(1-x) + \log(1+x) - 2\log x$

[...]

Mit mehr Praxisbezug präsentieren sich die Beispiele im Abschnitt „Exponentialgleichungen und logarithmische Gleichungen“. Bereits als Muster-Beispiel wird sehr ausführlich (mit dem Begriff „Halbwertszeit“ und einigen Einzelaufgaben dazu) auf den radioaktiven Zerfall eingegangen.

Im eigentlichen Aufgabenteil sind zuerst wieder zahlreiche Beispiele zum technischen Umgang mit dem Erlernten, gegliedert nach „Exponentialgleichungen“, „Logarithmische Gleichungen“ und „Vermischte Gleichungen“. Erst daran anschließend geht es wieder in die Praxis, etwa mit Folgendem:

DDT (Dichlordiphenyltrichlorethan) ist ein bekanntes Schädlingsbekämpfungsmittel, dessen bedenkenloser Einsatz dazu geführt hat, dass es überall auf der Welt vorkommt, so auch durch die Nahrungskette in der Muttermilch. Eine Konzentration von $0{,}05\,ppm$ *(= parts per million* $\hat{=}\,10^{-4}\%$*) ist zwar noch tolerabel, doch es wäre wünschenswert, wenn die Toleranzgrenze auf* $0{,}02\,ppm$ *gesenkt werden könnte. Wie lange wird das dauern, wenn ab sofort (wie bereits in fast allen Staaten) kein DDT mehr verwendet wird und die „Halbwertszeit“ von DDT etwa 30 Jahre beträgt (natürlich tritt kein atomarer Zerfall auf, sondern DDT zersetzt sich (leider nur sehr) langsam unter Umwelteinflüssen)?*

Aber auch Aufgaben wie etwa Berechnungen von Rohstoff-Reserven, Pendelschwingungen, dem Weber-Fechnerschen Gesetz und der ^{14}C-Methode sowie der barometrischen Höhenformel finden hier ihren Platz.

4.4.2 Taschner [4]

Taschner bringt bereits im Kapitel „Zahlengiganten“, das als Vorarbeit für die Kapitel über Logarithmen und Exponentialfunktionen verstanden werden kann, ein Beispiel, das für uns ebenfalls von Interesse ist, nämlich jenes vom Schöpfer des Schachbretts (→ 4.7 Exponentielles Denken). Ebendort findet sich auch das erste Beispiel mit Bakterien:

Eine Bakterienart vermehrt sich durch Zellteilung so, dass nach jeder halben Stunde doppelt so viele Bakterien vorhanden sind wie vorher. Unter der rein hypothetischen Annahme, dass sich die Bakterien ungehindert vermehren könnten und dabei ständig in Reih und Glied entlang einer Geraden aufgereiht wären – wie lange würde es dauern, bis diese Bakterienkette so lange wäre wie die Entfernung von der Erde bis zur Sonne?

Bei der folgenden Erklärung der Exponentialtafel sind einige Beispiele angeführt, die den Umgang mit dieser schulen sollen, ebenso bei der Erläuterung der Bürgischen Exponentialtafel als Weiterentwicklung.

Die Übungsbeispiele zu Logarithmen sind sehr interessant gestaltet, denn eine bloße „rein mathematische“ Aufgabe ist hier nicht zu finden. Alle Übungen sind in Text verpackt, wie beispielsweise:

Warum gelingt es, mit Hilfe der vier Näherungen $\ln 2 \approx 0{,}7$, $\ln 3 \approx 1{,}1$, $\ln 5 \approx 1{,}6$, $\ln 7 \approx 1{,}95$ *Näherungen der natürlichen Logarithmen der ganzen Zahlen 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 24, 25, 27, 28, 30, 32, 35, 36, 40, 42, 45, 48, 49, 50, 54, 56, 60, 63, 64, 70, 72, 7, 80, 81, 84, 90, 96, 98 zu ermitteln?*

Hinweis: Die [vorherigen Aufgaben, Anm.] lehren, wie man mit der ungefähren Kenntnis eines einzigen Logarithmus, nämlich $\ln 2 \approx 0{,}7$, *mit ein bisschen Geschick die Logarithmen einer ganzen Fülle von Zahlen gut abschätzen kann.*

In weiterer Folge tauchen auch hier Beispiele etwa zum pH-Wert auf.

Die Beispiele des Erweiterungskapitels „Wachstum und Zerfall“ handeln unter anderem von Bakterienwachstum, der barometrischen Höhenformel, Tiefenmessung, dem radioaktiven Zerfall und der Harmonie der Töne. Auch der Kondensator bei Gleichspannung findet Erwähnung.

Weiters hält das Erweiterungskapitel über „Zinsen und Zinseszinsen“ natürlich einige dazu passende Übungsaufgaben bereit.

4.4.3 Szirucsek-Dinauer-Unfried-Schatzl [31]

Szirucsek et.al. beginnen den Abschnitt mit Exponentialfunktionen. Im Rahmen der ersten Übungsaufgaben werden Wertetabelle und Graph für eine Exponentialfunktion ermittelt. Auch das Erstellen von Computerprogrammen hält hier bereits Einzug.

Es wird offenbar besonders viel Wert auf das grafische Erfassen gelegt, denn einige weitere Beispiele befassen sich ebenfalls mit dem Erstellen oder Zuordnen von Graphen, wie etwa hier:

> *Zeichne die Graphen der Exponentialfunktionen mit* $f(x) = 1{,}5^x$ *und* $g(x) = 2^x$ *in ein Koordinatensystem. Was fällt auf?*

Die Eigenschaften der Exponentialfunktion werden zum Teil ebenfalls über Beispiele erarbeitet. Daran schließen die bereits bewährten Klassiker unter den Übungsbeispielen an (Wachstum einer Pilzkultur, radioaktiver Zerfall).

Die weiteren Übungsbeispiele zur Exponentialfunktion sind im Vergleich zu anderen Schulbüchern sehr funktionen-orientiert. So gilt es etwa, die mittlere Änderung der Exponentialfunktion in bestimmten Intervallen zu berechnen und wichtige Eigenschaften von Funktionen zu erkennen.

Der Abschnitt über die Logarithmusfunktion beginnt mit einer Übungsaufgabe zur barometrischen Höhenformel. Zuerst wird das Beispiel näherungsweise gelöst und so der Logarithmusbegriff langsam eingeführt. Auch in diesem Kapitel wird sehr viel grafisch gearbeitet, etwa so:

> *Überlege mit Hilfe des Graphen der Exponentialfunktion mit* $f(x) = 1^x$*, dass die Gleichung* $1^x = b$ *(*$b \in \mathbb{R}^+$*) nicht eindeutig lösbar ist. Betrachte zwei Fälle.*

In diesem Abschnitt gibt es auch zahlreiche „technische" Übungsbeispiele, die den Umgang mit der „neuen Rechenmethode" schulen sollen. Ebenfalls sehr häufig treten Beispiele auf, in denen es um die Erstellung von Computerprogrammen für bestimmte Berechnungen oder Darstellungen geht.

Anwendungsorientierte Beispiele wie etwa Berechnungen zum radioaktiven Zerfall, zum pH-Wert und dem Weber-Fechnerschen Gesetz kommen hier ebenfalls vor.

4.4.4 Bürger-Fischer-Malle-Kronfellner-Mühlgassner-Schlöglhofer [46]

Der markanteste Unterschied des Bürger-Fischer-Malle et.al. Buches zu den anderen ist, dass es in zahlreichen Aufgaben darum geht, Beweise oder Beweisteile selbst zu führen oder zu argumentieren. So lautet eine Übungsaufgabe nach der Einführung des Zusammenhanges $a^x = b$:

> *Begründe, warum in diesem Satz [über die Eindeutigkeit, Anm.]* $a \neq 1$ *vorausgesetzt werden muss?*
>
> *(Hinweis: Überlege an Beispielen!)*

Zum Kapitel über Logarithmen sind zahlreiche Aufgaben angeführt, die die Routine mit der neuen Rechenmethode vermitteln sollen. Einige einfache Rechenregeln sind als Übungsbeispiel zu beweisen.

Die meisten Beispiele allerdings finden sich im Anschluss an den Theorie-Teil in einem eigenen Abschnitt „Aufgaben zur Wiederholung“. Da dieser Abschnitt für das gesamte Kapitel gilt, nimmt der Logarithmus dort nur eine niedrige Stelle ein.

Der Einstieg ins Folgekapitel „Wachstums- und Abnahmevorgänge“ erfolgt über ein Beispiel, nämlich das Wachstum einer Zellkultur. An dieses Beispiel schließen direkt einige Übungsbeispiele an.

Bei der Einführung der Exponentialfunktion gibt es als Übung wiederum einige kleine Beweise zu führen. Unter den Beispielen zu exponentiellen Prozessen finden sich, nicht weiter überraschend, der radioaktive Zerfall, das Wachstum von Bakterienkulturen, sowie Keime in der Kuhmilch. Auch mit der erst später erläuterten natürlichen Exponentialfunktion werden keine anderen Aufgaben gelöst als diese; insbesondere liegt das Augenmerk dann auf radioaktivem Zerfall.

4.4.5 Vergleich

Vergleicht man nun die Übungsaufgaben der einzelnen Schulbücher miteinander, so kann man feststellen, dass jeder Autor seine ganz persönlichen Schwerpunkte setzt, die ihm wichtig oder Erfolg versprechend erscheinen.

So kleidet Taschner beispielsweise alle Aufgaben in Worte, ein meiner Ansicht nach sehr interessanter Zugang, der einerseits das Verständnis seitens der SchülerInnen erleichtert und der andererseits viel dazu beitragen könnte, deutlicher zu machen, dass die Mathematik in der Welt eine wichtige Rolle zu erfüllen hat.

Bei Bürger-Fischer-Malle et.al. liegt einer der hervorstechenden Schwerpunkte im eigenständigen Beweisen und Argumentieren, dem zahlreiche Beispiele gewidmet sind.

Szirucsek et.al. geht vor allem den grafischen Weg, es gilt hier immer wieder Graphen zu zeichnen, zu interpretieren und zu vergleichen.

Mit zahlreichen handwerklichen Aufgaben warten Reichel et.al. auf. Man könnte vielleicht sagen, die Auswahl an Übungsbeispielen ist in diesem Buch am ausgewogensten – aber die Entscheidung für das eine oder andere Schulbuch ist sicher eine sehr subjektive und hängt von zahlreichen Faktoren ab, die es zu beachten gilt. Ein Grundstock an Standard-Beispielen (radioaktiver Zerfall, Zinsen, Bakterienwachstum, barometrische Höhenformel) kann jedenfalls in allen verglichenen Büchern gefunden werden, und in der Durchführung bestehen keine wesentlichen Unterschiede.

4.5 Übungsbeispiele aus Chemie zu e und Logarithmen

Die Themenbereiche „Exponentialfunktion“ und „Logarithmus“ stellen eine interessante Möglichkeit dar, fächerübergreifend zu arbeiten, insbesondere mit Chemie. Anhand eines sehr bekannten Chemie-Buches [50] soll dies nun mit einigen Beispielen erläutert werden.

Der „Brown/LeMay“ ist ein Standardwerk der Chemie. Dieses Buch bietet im Anhang sogar ein eigenes Kapitel über das Rechnen mit Logarithmen sowie eine Tabelle vierstelliger Logarithmen. Einige der zahlreichen Anknüpfungspunkte, die das Fach Chemie für unser Thema bietet, sollen nun mit Hilfe dieses Werkes vorgestellt werden. Dabei gehe ich nach der im Brown/LeMay vorgegebenen Reihenfolge vor.

Sofern in der 6. Klasse Chemie gelehrt wird, sind die Beispiele dem Niveau durchaus angemessen; auch für Wahlpflichtfach Chemie, Chemie-Olympiade sowie für Projektarbeiten ist eine Verwendung vorstellbar.

4.5.1 Logarithmische Skala

Im Kapitel 5.1 (Elektromagnetische Strahlung) werden die unterschiedlichen Arten elektromagnetischer Strahlung vorgestellt. Ein zugehöriges Bild zeigt die Verteilung der Strahlungsarten im Spektrum, aufgetragen auf eine logarithmische Skala. Die Autoren gehen nicht auf die „eigenartige“ Skalierung ein; es wäre eine spannende Aufgabe für SchülerInnen, herauszufinden, wie hier skaliert ist und warum: Eintragen Lassen von bestimmten Wellenlängen, Finden von Mittelwerten, etc.

4.5.2 Dampfdruck

Den Dampfdruck lernen wir im Kapitel 10.3 (Eigenschaften von Flüssigkeiten) kennen. Ein Merk-Kasten besagt Folgendes:

Die Abhängigkeit des Dampfdruckes von der Temperatur kann durch eine logarithmische Funktion wiedergegeben werden:

$$\log p = \frac{-\Delta H_v}{2{,}303 \cdot R \cdot T} + C$$

In dieser Gleichung ist T die absolute Temperatur, R die Gaskonstante, ΔH die molare Verdampfungsenthalpie und C eine Konstante. Man kann aus dieser Gleichung, die die ***Clausius-Clapeyronsche Gleichung*** *genannt wird, ablesen, dass man eine Gerade erhält, wenn $\log p$ gegen $1/T$ aufgetragen wird. Aus der Steigung der so erhaltenen Gerade kann die molare Verdampfungsenthalpie ermittelt werden.*

Die logarithmische Darstellung einer mathematischen Beziehung wird hier einfach als gegeben hingenommen, und auch hier wäre es eine nette Aufgabe, herauszufinden was es mit dieser „eigenartigen“ Skalierung auf sich hat.

Brown/LeMay führen zwei Übungsbeispiele zum genannten Zusammenhang an:

Die folgenden Daten beschreiben die Zunahme des Dampfdruckes von Quecksilber mit der Temperatur:

Temperatur in °C	*Dampfdruck von Hg in mbar*
50.0	*0.01689*
60.0	*0.03365*
70.0	*0.06433*
80.0	*0.1173*
90.0	*0.2109*

Stimmt dieses empirisch ermittelte Verhalten mit der Clausius-Clapeyronschen Gleichung überein? Ermitteln Sie, wenn das der Fall ist, aus der Steigung der Geraden die molare Verdampfungsenthalpie von Quecksilber in diesem Temperaturbereich.

Beim zweiten Beispiel handelt es sich um eine ähnliche Aufgabe, mit dem Unterschied, dass die Messwerte die Sublimationsenthalpie von Eis beschreiben. Auch hier ist zu überprüfen, ob die Clausius-Clapeyronsche Gleichung unter den veränderten Bedingungen ihre Gültigkeit behält.

4.5.3 Reaktionen erster Ordnung

Ein Zusammenhang, den wir schon an anderer Stelle kennengelernt haben, ist jener über die Geschwindigkeit chemischer Reaktionen. Im Kapitel 13.3 von Brown/LeMay wird dieser Sachverhalt dargestellt wie folgt:

Als erstes sei eine Reaktion der Form A → Produkte betrachtet. Für die Geschwindigkeit gilt dann folgendes Gesetz:

$$Geschwindigkeit = -\frac{d[A]}{dt} = k[A] \qquad (13\text{-}11)$$

(Ein Beispiel für einen Prozess, der einem Geschwindigkeitsgesetz erster Ordnung folgt, ist der radioaktive Zerfall.)

Nach Trennung der Variablen und Integration der Gleichung zwischen den Grenzen $[A]_0$ *(Ausgangskonzentration) und* $[A]_t$ *(zur Zeit t noch vorliegende Konzentration) sowie zwischen* $t = 0$ *(Beginn der Reaktion) und t ergibt sich das integrierte Geschwindigkeitsgesetz erster Ordnung:*

$$\ln\frac{[A]_t}{[A]_0} = -k \cdot t \qquad (13\text{-}12)$$

bzw. beim Übergang zu dekadischen Logarithmen

$$\log\frac{[A]_t}{[A]_0} = -\frac{k \cdot t}{2{,}30} \qquad (13\text{-}13)$$

Durch Umformen ergibt sich hieraus

$$\ln[A]_t = -k \cdot t + \ln[A]_0 \qquad (13\text{-}14)$$

$$\text{bzw. } \log[A]_t = -\frac{k \cdot t}{2{,}30} + \log[A]_0 \qquad (13\text{-}15)$$

Aus Gleichung (13-12) bzw. (13-13) ist ersichtlich, dass die zeitliche Abnahme der Konzentration $[A]_t$ *einem Exponentialgesetz folgt. Gleichung (13-14) entspricht dem Typ einer Geradengleichung* $y = ax + b$*, wobei* $y = \ln[A]_t$ *und* $x = t$ *ist. Die Steigung der Geraden wäre dann* $-k$*, der Schnittpunkt mit der y-Achse* $b = \ln[A]_0$.

Anhand zweier Beispiele (Umlagerung von Methylisonitril zu Acetonitril; Hydrolyse eines Insektizids) wird dieses neu gewonnene Wissen gefestigt. Ein weiterer Arbeitsauftrag für SchülerInnen könnte sein herauszufinden, welchen (absoluten und relativen) Fehler man dadurch in Kauf nimmt, dass der Umrechnungsfaktor von $\ln$ auf $\log$ mit 2,30 festgelegt wird!

Im Übungsteil kommt der obige Zusammenhang einige Male versteckt zur Anwendung, hier zwei ausgewählte Beispiele:

> *Der Zerfall von N_2O_5 in Tetrachlorkohlenstoff verläuft wie folgt:*
>
> *$2N_2O_5 \rightarrow 4NO_2 + O_2$.*
>
> *Die Reaktion ist erster Ordnung hinsichtlich N_2O_5. Bei 45°C beträgt die Geschwindigkeitskonstante $6{,}08 \cdot 10^{-4}\, s^{-1}$. Berechnen Sie das Geschwindigkeitsgesetz, wenn (a) $[N_2O_5] = 0{,}100 mol/L$; (b) $[N_2O_5] = 0{,}305 mol/L$ ist.*

> *Betrachten Sie die folgende Reaktion: $2NO(g) + 2H_2(g) \rightarrow N_2(g) + 2H_2O(g)$*
>
> *(a) Das Geschwindigkeitsgesetz der Reaktion ist erster Ordnung bezogen auf H_2 und zweiter Ordnung bezogen auf NO. Wie lautet das Geschwindigkeitsgesetz? (b) Die Geschwindigkeitskonstante dieser Reaktion beträgt bei 1000K $6{,}0 \cdot 10^4\, L^2 \cdot mol^{-2} s^{-1}$. Wie groß ist dann die Reaktionsgeschwindigkeit, wenn $[NO] = 0{,}500 mol/L$ und $[H_2] = 0{,}010 mol/L$ ist? (c) Wie groß wird die Reaktionsgeschwindigkeit bei 1000K, wenn die Konzentration von NO auf $0{,}10 mol/L$ verdoppelt, die Konzentration von H_2 konstant gehalten wird?*

Exemplarisch sei für dieses Beispiel auch die Lösung angeführt:

(a) $-\frac{d[NO]}{dt} = -\frac{d[H_2]}{dt} = k[H_2][NO]^2$

(b) $-\frac{d[NO]}{dt} = 6{,}0 \cdot 10^4\, mol^{-2} L^2 s^{-1} \cdot (0{,}050\, mol/L)^2 \cdot 0{,}010\, mol/L = 1{,}5\, mol/(L \cdot s)$

(c) $-\frac{d[NO]}{dt} = 6{,}0 \cdot 10^4\, mol^{-2} L^2 s^{-1} \cdot (0{,}100\, mol/L)^2 \cdot 0{,}010\, mol/L = 6{,}0\, mol/(L \cdot s)$

Eine Verdopplung der NO-Konzentration bewirkt also eine Vervierfachung der Reaktionsgeschwindigkeit.

4.5.4 Die Arrhenius-Gleichung

Eng mit dem vorigen Abschnitt verknüpft, beschreibt die Arrhenius-Gleichung die Temperaturabhängigkeit der Geschwindigkeitskonstanten:

$$k = A \cdot e^{-\frac{E_a}{RT}} \quad \text{oder} \quad \ln k = -\ln A - \frac{E_a}{RT}$$

Hierbei ist k die Geschwindigkeitskonstante, E_a die Aktivierungsenergie, R die Gaskonstante und T die thermodynamische Temperatur. A ist der sogenannte Frequenzfaktor. Die Geschwindigkeitskonstante nimmt also exponentiell mit der Temperatur zu. Interessant ist auch die folgende Darstellung:

Um eine Beziehung zwischen den Geschwindigkeitskonstanten bei zwei verschiedenen Temperaturen, T_1 und T_2, zu erhalten, kann man die Gleichung entsprechend umformen. Es gelten die Beziehungen

$$\ln k_1 = \ln A - \frac{E_a}{RT_1} \quad \text{bzw.} \quad \ln k_2 = \ln A - \frac{E_a}{RT_2}$$

Durch Subtraktion der zweiten von der ersten Gleichung ergibt sich

$$\ln k_1 - \ln k_2 = \ln A - \frac{E_a}{RT_1} - \ln A - \frac{E_a}{RT_2}$$

Durch Vereinfachung und Umformen erhalten wir

$$\ln \frac{k_1}{k_2} = -\frac{E_a}{R} \cdot \left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} \right)$$

Aus dieser Gleichung lässt sich die Geschwindigkeitskonstante einer Reaktion bei einer bestimmten Temperatur berechnen, wenn die Geschwindigkeitskonstante bei einer anderen Temperatur und die Aktivierungsenergie bekannt sind.

Auch dazu bieten Brown/LeMay einige Übungsbeispiele, von denen eines genannt werden soll:

Die Geschwindigkeit der Reaktion $CH_3COOC_2H_5(aq) + OH^-(aq) \rightarrow CH_3COO^-(aq) + C_2H_5OH(aq)$ wurde bei verschiedenen Temperaturen bestimmt, wobei die folgenden Daten erhalten wurden:

Temperatur in K	*k in $L \cdot mol^{-1} s^{-1}$*
288	*0,0521*
298	*0,101*
308	*0,184*
318	*0,332*

Tragen Sie mit Hilfe dieser Daten $\ln k$ gegen $1/T$ auf, und bestimmen Sie den Wert von E_a.

4.5.5 Der pH-Wert; andere pX-Skalen

Eines der klassischen Übungsbeispiele, die sich auch in Schulbüchern wiederfinden, ist die Berechnung des pH-Wertes. Natürlich kann das Wissen über die fachlichen Hintergründe fundierter von chemischer Seite vermittelt werden. Allerdings wird in vielen Büchern auf Herleitungen verzichtet, d.h. dem vollen Verständnis steht manchmal der induktive Aufbau des Lehr- bzw. Lernstoffes im Wege. Auch hier wird der pH-Wert zuerst über eine Definition eingeführt:

Der pH-Wert ist als negativer dekadischer Logarithmus der Wasserstoffionenaktivität definiert.

$$pH = -\log a_{H^+} = \log \frac{1}{a_{H^+}}$$

Nach einigen Übungsbeispielen („Eine Probe frisch gepressten Apfelsafts hat einen pH-Wert von 3,76. Berechnen Sie a_{H^+}.“) werden in einem Folgekapitel auch andere pX-Skalen vorgestellt:

Mit Hilfe des negativen Logarithmus lassen sich kleine Zahlenwerte, wie beispielsweise Aktivitäten bestimmter Spezies, besonders einfach darstellen. Im Allgemeinen wird der negative Logarithmus einer Zahl durch das Symbol „p(Spezies)“ dargestellt. So lässt sich z.B. die OH^--Ionenaktivität durch pOH wiedergeben:

$$pOH = -\log a_{OH^-}$$

Zu diesem Sachverhalt finden sich zahlreiche Übungsbeispiele; wieder seien stellvertretend zwei genannt:

Berechnen Sie den pH-Wert, der den folgenden H^+- oder OH^--Aktivitäten entspricht: (a) $a_{H^+} = 3{,}0 \cdot 10^{-5}$; (b) $a_{H^+} = 4{,}0 \cdot 10^{-10}$; (c) $a_{OH^-} = 1{,}0 \cdot 10^{-7}$; (d) $a_{H^+} = 8 \cdot 10^{-2}$; (e) $a_{OH^-} = 5 \cdot 10^{-3}$; (f) $a_{OH^-} = 8 \cdot 10^{-9}$; (g) $a_{OH^-} = 6 \cdot 10^{-7}$.

Um welchen Faktor ändert sich a_{H^+}, wenn sich der pH-Wert (a) um 3,00; (b) um 0,3; (c) um 2,00 ändert?

Berechnungen dieser Art scheinen auch in einem späteren Kapitel nochmals auf, wenn es um die Berechnung von Pufferlösungen (wie zum Beispiel Blut eine ist) geht.

4.5.6 Freie Enthalpie

Bei der so genannten *Freien Enthalpie G* handelt es sich um eine thermodynamische Zustandsfunktion, die von J. Willard Gibbs[38] eingeführt wurde und mit der Enthalpie *H* und der Entropie *S* sowie der thermodynamischen Temperatur über die folgende Beziehung verknüpft ist:

$$G = H - TS$$

Bei einem Vorgang, der bei konstanter Temperatur und konstantem Druck verläuft, ist die Änderung der Freien Enthalpie gegeben durch die Gleichung:

$$\Delta G = \Delta H - T\Delta S$$

Liegt nun eine allgemeine Reaktion vor, die dem Schema

$$aA + bB + \ldots \rightarrow pP + qQ + \ldots$$

folgt, so beträgt die entsprechende Änderung der Freien Enthalpie:

$$\Delta G_r^o = \left[p\,mol\,\Delta G_f^o(P) + q\,mol\,\Delta G_f^o(Q) + \ldots\right] - \left[a\,mol\,\Delta G_f^o(A) + b\,mol\,\Delta G_f^o(A) + \ldots\right]$$

Hierbei bedeutet $\Delta G_f^o(X)$ jeweils die molare freie Standard-Bildungsenthalpie des Produktes X. An Hand dieser Größe ΔG_r^o kann man nun erkennen, ob ein Gemisch von Reaktanden und Produkten unter Standardbedingungen in Richtung der Produkte (negatives ΔG_r^o) oder in Richtung der Reaktanden (positives ΔG_r^o) reagiert.

Einerseits kann man ΔG_r^o aus Tabellenwerten ermitteln; andererseits gilt für jeden chemischen Vorgang die folgende Beziehung zwischen ΔG_r^o (der Änderung der freien Standardenthalpie) und ΔG_r (der entsprechenden Änderung unter anderen äußeren Bedingungen):

$$\Delta G_r = \Delta G_r^o + RT \ln Q$$

Hierbei bezeichnet R die allgemeine Gaskonstante ($R = 8{,}314 JK^{-1} mol^{-1}$), T die thermodynamische Temperatur und Q den Reaktionsquotienten der betrachteten Reaktion. Diese Gleichung tritt auch in Brown/LeMay ohne entsprechende Ableitung auf, es wird auf Lehrbücher der Physikalischen Chemie verwiesen.

Auch Übungsbeispiele sind keine angeführt, dennoch ist es interessant auch hier aufzuzeigen, wie allgegenwärtig Exponentialfunktion und Logarithmus in Anwendungen der Praxis sind.

4.5.7 Weitere Anwendungen im Chemie-Lehrbuch

Auch im Brown/LeMay finden Anwendungen Eingang, die wir bereits an anderer Stelle ausführlich besprochen haben, wie etwa die Barometrische Höhenformel und die Berechnung der Halbwertszeit in Zusammenhang mit radioaktivem Zerfall und Altersbestimmungen.

4.6 Transzendente Zahlen in der Schule

Die Behandlung der Eulerschen Zahl kann auch ein willkommener Anlass sein, in der Schule über transzendente Zahlen zu sprechen. Hier ergibt sich ein Anknüpfungspunkt zur Theorie der Zahlbereiche, die im Unterricht meist ohnedies zu kurz kommt.

Es wird im Laufe des Unterrichts gezeigt, dass $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ abzählbare (unendliche) Mengen sind, ebenso wie beispielsweise die Menge der geraden oder der ungeraden Zahlen, jene der Quadratzahlen, der Primzahlen, ...

Ebenso wird gelehrt dass $\mathbb{R}$ überabzählbar ist. Als Konsequenz kann man daher erkennen, dass die Menge der irrationalen Zahlen überabzählbar ist.

Beim Lösen von Gleichungen lernen die SchülerInnen sehr zwanglos auch die *algebraischen Zahlen* kennen, die ja Lösungen von Gleichungen folgender Form sind:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n = 0 \quad (a_i \in \mathbb{Z})$$

Auch für die SchülerInnen ist nun erkennbar, dass sich der Bereich der algebraischen Zahlen „zwischen“ den bereits bekannten Bereichen der rationalen und der reellen Zahlen einordnen lässt: $\mathbb{Q} \subset \mathbb{A} \subseteq \mathbb{R}$.

Nun stellen sich die Fragen, ob jede reelle Zahl algebraisch ist, bzw. in weiterer Folge, welche Mächtigkeit $\mathbb{A}$ hat.

Es kann bewiesen werden, dass die Menge $\mathbb{A}$ abzählbar ist (erstmalig durch Cantor gezeigt) – für zwei unterschiedliche Beweise sei auf die Literatur verwiesen ([14]).

Ist $\mathbb{A}$ aber abzählbar, dann muss es noch eine weitere Zahlenmenge geben, da ja $\mathbb{R}$ überabzählbar ist. Dabei handelt es sich um die transzendenten Zahlen, und die Menge $\mathbb{T}$ dieser transzendenten Zahlen ist überabzählbar, hat also gleiche Mächtigkeit wie $\mathbb{R}$.

4.7 Exponentielles Denken – erlernbar, erlebbar?

Die Legende ist wohl allgemein bekannt: der Erfinder des Schachspiels wurde zum König zitiert, der ihn fragte, was er sich wohl als Belohnung für seine Erfindung wünsche. Es solle ein Weizenkorn auf das erste Feld gelegt werden, zwei auf das zweite, vier auf das dritte und so weiter, bis alle vierundsechzig Felder belegt seien, so antwortete der Befragte. Angesichts dieser scheinbaren Bescheidenheit war der König sehr erstaunt und ließ seine Diener unverzüglich einen Sack Weizen herbeiholen. Die Diener begannen damit, die Felder zu belegen – aber bald stellte sich heraus, dass der Sack nicht reichen würde, ja dass die gesamten Weizenkörner des Landes nicht reichen würden. Denn die Zahl der Körner auf dem letzten Feld betrüge 2^{63}, oder 9.223.372.036.854.775.808, sprich: über neun Trillionen – und dazu kämen noch die Körner auf den übrigen Feldern, zusammengenommen fast ebenso viele[39]! ([5], Seiten 94-95; [8], Seiten 162-163)

Wie konnte sich der König nur so verschätzen? Ganz einfach deshalb, weil er die Bedeutung eines exponentiellen Vorganges nicht erfasst hat. Es handelt sich hierbei um ein Phänomen, das uns heute oft begegnet. Oder, wie sich Dietrich Dörner ausdrückt (siehe [8], Seite 163): *»Interessant ist für uns nicht so sehr die List des Erfinders des Schachspiels. Interessanter ist der König! Er war offensichtlich nicht in der Lage, die Charakteristika einer bestimmten Entwicklung richtig zu erfassen. Der explosive Verlauf einer exponentiellen Entwicklung blieb ihm verborgen. Es gibt viele solcher Könige!«*

Man denke in diesem Zusammenhang auch an die folgende bekannte Fragestellung (beispielsweise bei [8], Seiten 161-162):

In einem Teich mit einer Wasseroberfläche von 1300m^2 wächst eine Seerose. Zu Beginn des Frühjahres hat sie ein Blatt. Ein Blatt hat eine Fläche von 100cm^2. Nach einer Woche hat die Seerose zwei Blätter. Nach der darauffolgenden vier. Nach sechzehn Wochen ist der halbe Teich bedeckt. Wie lange wird es noch dauern, bis der ganze Teich bedeckt ist? Was schätzen Sie?!

Wenn man davon ausgeht, dass die Seerose ihre Entwicklung mit gleich bleibender Geschwindigkeit fortsetzt – und warum sollte sie das nicht tun? –, dann dauert es eine weitere Woche, bis der Teich zur Gänze bedeckt ist. Die dafür nötige Rechnung darf, mathematisch betrachtet, als trivial angesehen werden.

Dennoch macht die Aufgabe vielen Menschen Schwierigkeiten, und man erhält überraschend falsche Antworten. Es scheint schwer einzusehen zu sein, dass die Seerose binnen nur einer Woche eine weitere Hälfte des Teiches bedecken könne, wenn doch das Bedecken der ersten Hälfte volle sechzehn Wochen gedauert hat.

Wie auch schon die Legende des Königs mit dem Schachbrett gezeigt hat, ist es offensichtlich sehr schwer für uns Menschen, exponentielle Vorgänge richtig zu erfassen. Auch in der Tagespresse finden sich dafür immer wieder Beispiele, so auch jenes der AIDS-Erkrankungen in Deutschland, das Dietrich Dörner anführt ([8], Seite 162):

»Dort [in der Frankfurter Allgemeinen Zeitung, Anm.] stand [...] über die Ausbreitung der Krankheit AIDS zu lesen, dass am 2. September 1985 262 Fälle von Erkrankungen in der Bundesrepublik Deutschland bekannt geworden seien. Mitte August seien es 230 gewesen. [...]

Die Autorin beendet den Absatz mit der Frage: „Eine verschwindend geringe Zahl – verglichen mit den Krebstoten, den Verkehrstoten, den Herz- und Kreislaufkranken?“ Hier haben wir wieder das milde Lächeln des indischen Königs: Wer wird sich denn über so ein bisschen Reis aufregen?«

Eine der möglichen Ursachen ist, dass lineares Denken für Menschen eine sogenannte Heuristik darstellt, sprich: eine Vereinfachung des Denkens, die sich bei alltäglichen Problemen bewährt, aber bei außergewöhnlichen Problemen versagt.

Ich hoffe sehr, dass die geschätzten Leser und Leserinnen nach Lektüre meiner Arbeit nicht mehr der Meinung sind, exponentielle Vorgänge wären in unserem täglichen Leben von untergeordneter Wichtigkeit – allerdings muss man zur Kenntnis nehmen, dass die Rechnungen, die wir im täglichen Leben auszuführen haben, tatsächlich fast ausschließlich linear sind. Darunter fallen etwa das Einkaufen (ein Apfel kostet x €, daher kosten 2 Äpfel 2x €), das Verteilen von Kuchenstücken und so weiter.

Exponentielle Prozesse kommen zwar täglich in unserem Leben vor, und oft wären wir in ernsthaften Schwierigkeiten, wären diese Prozesse linear – aber wir sind üblicherweise nicht damit befasst, sie zu berechnen, sondern erfassen sie bestenfalls intuitiv oder aus Erfahrung richtig.

5. Epilog

Die Tatsache, dass die Eulersche Zahl als Basis der natürlichen Exponentialfunktion in Erscheinung tritt und damit ein essentieller Bestandteil unglaublich vieler Prozesse in der Natur ist, übte und übt eine ganz besondere Faszination auf mich aus.

Diese Faszination war es auch, die mich veranlasste, meine Diplomarbeit der Eulerschen Zahl zu widmen und so den mathematischen und historischen Hintergründen etwas auf die Spur zu kommen.

Für mich persönlich war dieses Vorhaben sehr gewinnbringend, denn zahlreiche mathematische Feinheiten des Gebietes, in dem ich gearbeitet habe, konnte ich nun in ihrer tiefen Bedeutung erfassen und sie so wirklich *er-kennen* und *be-greifen*.

Die Beschäftigung mit dem Thema war für mich zweifelsohne bereichernd, und so hoffe ich nun, dass der eine oder die andere durch die vorliegende Arbeit ebenfalls tiefere Einblicke bekommen kann in die mathematische Landschaft, in der die Eulersche Zahl als Basis der natürlichen Exponentialfunktion eingebettet ist.

Besonders erfreulich fände ich es, kämen manche Aspekte des vorliegenden Werks dem Schulunterricht zu Gute, denn gerade in Zusammenhang mit Logarithmus und Exponentialfunktion gibt es hier sicher nach wie vor Verbesserungsmöglichkeiten.

In diesem Sinne hoffe ich darauf, dass meine Arbeit mit dazu beitragen kann, dieses spannende und wichtige Stoffgebiet verständlich und schlüssig zu vermitteln.

Anmerkungen

---

[1] F. Vieté, geboren 1540, gestorben 1603, französischer Mathematiker.

[2] Napier, John Lord von Merchiston, auch: Neper, geboren 1550 in Merchiston-Castle (Schottland), gestorben am 3. April 1617 ebendort, war Gutsherr. Napier brachte als erster eine Logarithmen-Tafel heraus, vermutlich inspiriert durch Stifel. Er erfand auch mechanische Hilfsmittel für den Ackerbau.

[3] Jost (Justus) Bürgi, geboren 28. Februar 1552 in Lichtensteig (Schweiz), gestorben 31. Jänner 1632 in Kassel (Deutschland), war Uhrmachermeister und Instrumentenbauer. Er fertigte auch astronomische und mathematische Instrumente an, darunter ein Instrument zum perspektivischen Zeichnen. Angeregt durch Stifel und Kepler berechnete er umfangreiche Multiplikations-Tafeln. Er gilt als einer der „Erfinder der Logarithmen“ (siehe auch [33]).

[4] Die Tafeln wurden erst 1620 veröffentlicht, sodass Napier als Schöpfer der ersten Logarithmen galt.

[5] Euler verwendet für diesen Wert die Bezeichnung *i*. Um Verwechslungen mit der komplexen Einheit zu vermeiden, verwende ich stattdessen *j*.

[6] Der Binomische Lehrsatz lautet: Für eine nichtnegative ganze Zahl n und reelle Zahlen a, b gilt:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} b^k$$

bzw. ausführlich:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n$$

[7] Wie auch schon oben, verwendete Euler im Original die Bezeichnung i für die unendliche Größe. Wiederum habe ich diese aus Gründen der Verwechslungs-Sicherheit durch *j* ersetzt.

[8] Siehe [3], Volume 3, Seite 338.

[9] Siehe u.a. [24].

[10] Siehe [5], Seite 191.

[11] Für eine alte, aber umfangreiche Einführung in das Gebiet der Kettenbrüche siehe O. Perron: Die Lehre von den Kettenbrüchen. Teubner, Leipzig, 1929.

[12] Für weitere Kettenbruch-Entwicklungen siehe zum Beispiel [5], Seite 146.

[13] Siehe dazu „Gibt es wirklich so viele irrationale Zahlen?“, in: Mathematik Lehren, Heft 31, Seite 27.

[14] Joseph Liouville, geboren 24. März 1809 in St. Omer (Frankreich), gestorben 8. September 1882 in Paris, zählte zu den bedeutendsten Mathematikern des 19. Jahrhunderts. Er verfasste über 400 mathematische Arbeiten und gründete 1836 ein mathematisches Journal, dem er auch lange als Herausgeber vorstand. Außerdem war er ein exzellenter Hochschullehrer (siehe auch [33]).

[15] C. Hermite, geboren 1822, gestorben 1901, französischer Mathematiker.

[16] F. Lindemann zeigte 1884 die Transzendenz von *e*.

[17] Bernoulli, schweizerische Mathematiker-Dynastie. Jakob Bernoulli (1654-1705) lehrte in Basel. Er verwendete seit 1686 die vollständige Induktion, berechnete Potenzsummen mit Hilfe der nach ihm benannten Bernoullischen Zahlen und behandelte mit Erfolg eine Reihe von damals aktuellen mathematischen Problemen. Er ist der Mitbegründer der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Jakob Bernoulli war zeitweise erheblich verfeindet mit seinem wissenschaftlichen Konkurrenten und jüngeren Bruder Johann Bernoulli (1667-1748), der in Genf, Paris, Groningen und schließlich auch in Basel wirkte, wo er nach dem Tode Jakobs als führender Mathematiker seiner Zeit galt. Er beschäftigte sich mit Reihen und Differentialgleichungen sowie mit verschiedenen, durch geometrische und mechanische Fragestellungen

ausgezeichnete Kurven. Sein Sohn Daniel Bernoulli (1700-1782), der in Sankt Petersburg und wiederum in Basel wirkte, setzte im Wesentlichen die Familientradition fort. Er arbeitete auf den Gebieten der Differentialgleichungen und der Wahrscheinlichkeitsrechnung, ist der Begründer der Hydromechanik und Schöpfer der kinetischen Theorie des Gases.

[18] Siehe auch [5], Seiten 31-32 und 151-152.

[19] Siehe z.B. H. Griesel, Analysis I – Unterrichtshefte zur Mathematik von heute. 3. Aufl. – Hannover, Schroedel 1971, Seite 47, sowie H. Griesel, Analysis II – Unterrichtshefte zur Mathematik von heute. – Hannover, Schroedel 1970, Seite 64.

[20] Siehe [36], Seite 280.

[21] Siehe zum Beispiel [21], Seiten 38-39, oder auch [20].

[22] Siehe [20].

[23] Siehe etwa [1], Seite 598.

[24] Evangelista Torricelli, 1608-1647, Schüler Galileis, durch seine physikalischen Experimente bekannt geworden.

[25] Ausführlicher in [5], Seite 117 bzw. Anhang A6.

[26] Hauskapelle Texing, Grundriss: logarithmische Spirale, die in einem Kreis endet. NÖ Schön Erhalten – Schöner Gestalten #85, Sankt Pölten, Feb. 2000.

[27] Der Ordnung halber sei angemerkt, dass nur das Umordnen von *endlichen* Summen mit völliger Sicherheit unproblematisch ist. Bei unendlichen Reihen kann das zu einem anderen Ergebnis führen und sogar aus einer konvergenten Reihe eine divergente Reihe machen! (siehe [5], Seite 153)

Euler, der diese Umformung als erster durchführte, war sich dessen vermutlich nicht wirklich bewusst; in seiner Zeit wurde unbekümmert mit Formeln herumexperimentiert. Angenehmerweise ist die Umordnung in diesem speziellen Fall aber zulässig und korrekt.

[28] Siehe auch [5], Seite 154.

[29] Die Moivre-Formel $(\cos \boldsymbol{j} + i \sin \boldsymbol{j})^n = \cos(n\boldsymbol{j}) + i \sin(n\boldsymbol{j})$ erscheint uns in diesem Zusammenhang plötzlich sehr natürlich und einleuchtend, denn anders angeschrieben steht hier ja nur $(e^{ix})^n = e^{inx}$.

[30] Ernst Heinrich Weber, 1795-1878, deutscher Physiologe.

[31] Gustav Theodor Fechner, 1801-1887, deutscher Physiker.

[32] SI = Internationales Einheitensystem.

[33] Unter einem Nuklid versteht man eine bestimmte Atomsorte mit einer durch die Kernladungszahl Z und die Massenzahl A festgelegten Kern-Art. Radioaktive Nuklide nennt man auch Radionuklide.

[34] Das Massenwirkungsgesetz besagt, dass die Richtung, in der eine bestimmte Gleichgewichtsreaktion bei gegebenen Werten von Druck und Temperatur abläuft, durch die Konzentrationen (relativen Massen) der Ausgangsstoffe und der Produkte bewirkt wird. Durch geeignete chemische Umsetzung (Hin- oder Rückreaktion) werden die Konzentrationen der beteiligten Stoffe so lange verändert, bis der Wert der entsprechenden Gleichgewichtskonstanten erreicht ist.

[35] Siehe Mathematik Lehren, Heft 34, Seite 56-57.

[36] Der pH-Wert ist der negative dekadische Logarithmus der Aktivität (näherungsweise der Konzentration in mol/l gleichzusetzen) der Hydroniumionen in einer Lösung. Reines Wasser hat einen pH-Wert von 7, saure Lösungen haben einen kleineren, alkalische Lösungen einen größeren pH-Wert als 7.

[37] Michael Stifel, geboren um 1847, gestorben um 1567.

[38] J. Willard Gibbs (1839-1903), amerikanischer Mathematiker.

[39] Die Gesamtsumme beträgt 18.446.744.073.709.551.615 Reiskörner – das ist die doppelte Anzahl der Körner auf dem letzten Feld, vermindert um 1.

Anhang: Die ersten 10.000 Stellen

e = 2. 71828 18284 59045 23536 02874 71352 66249 77572 47093 69995 95749 66967
62772 40766 30353 54759 45713 82178 52516 64274 27466 39193 20030 59921 81741
35966 29043 57290 03342 95260 59563 07381 32328 62794 34907 63233 82988 07531
95251 01901 15738 34187 93070 21540 89149 93488 41675 09244 76146 06680 82264
80016 84774 11853 74234 54424 37107 53907 77449 92069 55170 27618 38606 26133
13845 83000 75204 49338 26560 29760 67371 13200 70932 87091 27443 74704 72306
96977 20931 01416 92836 81902 55151 08657 46377 21112 52389 78442 50569 53696
77078 54499 69967 94686 44549 05987 93163 68892 30098 79312 77361 78215 42499
92295 76351 48220 82698 95193 66803 31825 28869 39849 64651 05820 93923 98294
88793 32036 25094 43117 30123 81970 68416 14039 70198 37679 32068 32823 76464
80429 53118 02328 78250 98194 55815 30175 67173 61332 06981 12509 96181 88159
30416 90351 59888 85193 45807 27386 67385 89422 87922 84998 92086 80582 57492
79610 48419 84443 63463 24496 84875 60233 62482 70419 78623 20900 21609 90235
30436 99418 49146 31409 34317 38143 64054 62531 52096 18369 08887 07016 76839
64243 78140 59271 45635 49061 30310 72085 10383 75051 01157 47704 17189 86106
87396 96552 12671 54688 95703 50354 02123 40784 98193 34321 06817 01210 05627
88023 51930 33224 74501 58539 04730 41995 77770 93503 66041 69973 29725 08868
76966 40355 57071 62268 44716 25607 98826 51787 13419 51246 65201 03059 21236
67719 43252 78675 39855 89448 96970 96409 75459 18569 56380 23637 01621 12047
74272 28364 89613 42251 64450 78182 44235 29486 36372 14174 02388 93441 24796
35743 70263 75529 44483 37998 01612 54922 78509 25778 25620 92622 64832 62779
33386 56648 16277 25164 01910 59004 91644 99828 93150 56604 72580 27786 31864
15519 56532 44258 69829 46959 30801 91529 87211 72556 34754 63964 47910 14590
40905 86298 49679 12874 06870 50489 58586 71747 98546 67757 57320 56812 88459
20541 33405 39220 00113 78630 09455 60688 16674 00169 84205 58040 33637 95376
45203 04024 32256 61352 78369 51177 88386 38744 39662 53224 98506 54995 88623
42818 99707 73327 61717 83928 03494 65014 34558 89707 19425 86398 77275 47109
62953 74152 11151 36835 06275 26023 26484 72870 39207 64310 05958 41166 12054
52970 30236 47254 92966 69381 15137 32275 36450 98889 03136 02057 24817 65851
18063 03644 28123 14965 50704 75102 54465 01172 72115 55194 86685 08003 68532
28183 15219 60037 35625 27944 95158 28418 82947 87610 85263 98139 55990 06737
64829 22443 75287 18462 45780 36192 98197 13991 47564 48826 26039 03381 44182
32625 15097 48279 87779 96437 30899 70388 86778 22713 83605 77297 88241 25611
90717 66394 65070 63304 52795 46618 55096 66618 56647 09711 34447 40160 70462
62156 80717 48187 78443 71436 98821 85596 70959 10259 68620 02353 71858 87485
69652 20005 03117 34392 07321 13908 03293 63447 97273 55955 27734 90717 83793
42163 70120 50054 51326 38354 40001 86323 99149 07054 79778 05669 78533 58048
96690 62951 19432 47309 95876 55236 81285 90413 83241 16072 26029 98330 53537
08761 38939 63917 79574 54016 13722 36187 89365 26053 81558 41587 18692 55386
06164 77983 40254 35128 43961 29460 35291 33259 42794 90433 72990 85731 58029
09586 31382 68329 14771 16396 33709 24003 16894 58636 06064 58459 25126 99465
57248 39186 56420 97526 85082 30754 42545 99376 91704 19777 80085 36273 09417
10163 43490 76964 23722 29435 23661 25572 50881 47792 23151 97477 80605 69672
53801 71807 76360 34624 59278 77846 58506 56050 78084 42115 29697 52189 08740
19660 90665 18035 16501 79250 46195 01366 58543 66327 12549 63990 85491 44200

01457 47608 19302 21206 60243 30096 41270 48943 90397 17719 51806 99086 99860
66365 83232 27870 93765 02260 14929 10115 17177 63594 46020 23249 30028 04018
67723 91028 80978 66605 65118 32600 43688 50881 71572 38669 84224 22010 24950
55188 16948 03221 00251 54264 94639 81287 36776 58927 68816 35983 12477 88652
01411 74110 91360 11649 95076 62907 79436 46005 85194 19985 60162 64790 76153
21038 72755 71269 92518 27568 79893 02761 76114 61625 49356 49590 37980 45838
18232 33686 12016 24373 65698 46703 78585 33052 75833 33793 99075 21660 69238
05336 98879 56513 72855 93883 49989 47074 16181 55012 53970 64648 17194 67083
48197 21448 88987 90676 50379 59036 69672 49499 25452 79033 72963 61626 58976
03949 85767 41397 35944 10237 44329 70935 54779 82629 61459 14429 36451 42861
71585 87339 74679 18975 71211 95618 73857 83644 75844 84235 55581 05002 56114
92391 51889 30994 63428 41393 60803 83091 66281 88115 03715 28496 70597 41625
62823 60921 68075 15017 77253 87402 56425 34708 79089 13729 17228 28611 51591
56837 25241 63077 22544 06337 87593 10598 26760 94420 32619 24285 31701 87817
72960 23541 30606 72136 04600 03896 61093 64709 51414 17185 77701 41806 06443
63681 54644 40053 31608 77831 43174 44081 19494 22975 59931 40118 88683 31483
28027 06553 83300 46932 90115 74414 75631 39997 22170 38046 17092 89457 90962
71662 26074 07187 49975 35921 27560 84414 73782 33032 70330 16823 71936 48002
17328 57349 35947 56433 41299 43024 85023 57322 14597 84328 26414 21684 87872
16733 67010 61509 42434 56984 40187 33128 10107 94512 72237 37886 12605 81656
68053 71439 61278 88732 52737 38903 92890 50686 53241 38062 79602 59303 87727
69778 37928 68409 32536 58807 33988 45721 87460 21005 31148 33513 23850 04782
71693 76218 00490 47955 97959 29059 16554 70505 77751 43081 75112 69898 51884
08718 56402 60353 05583 73783 24229 24185 62564 42550 22672 15598 02740 12617
97192 80471 39600 68916 38286 65277 00975 27670 69777 03643 92602 24372 84184
08832 51848 77047 26384 40379 53016 69054 65937 46161 93238 40363 89313 13643
27137 68884 10268 11219 89127 52230 56256 75625 47017 25086 34976 53672 88605
96675 27408 68627 40791 28565 76996 31378 97530 34660 61666 98042 18267 72456
05306 60773 89962 42183 40859 88207 18646 82623 21508 02882 86359 74683 96543
58856 68550 37731 31296 58797 58105 01214 91620 76567 69950 65971 53447 63470
32085 32156 03674 82860 83786 56803 07306 26576 33469 77429 56346 43716 70939
71930 60876 96349 53288 46833 61303 88294 31040 80029 68738 69117 06666 61468
00015 12114 34422 56023 87447 43252 50769 38707 77751 93299 94213 72772 11258
84360 87158 34835 62696 16619 80572 52661 22067 97540 62106 20806 49882 91845
43953 01529 98209 25030 05498 25704 33905 53570 16865 31205 26495 61485 72492
57386 20691 74036 95213 53373 25316 66345 46658 85972 86659 45113 64413 70331
39367 21185 69553 95210 84584 07244 32383 55860 63106 80696 49248 51232 63269
95146 03596 03729 72531 98368 42336 39046 32136 71011 61928 21711 15028 28016
04488 05880 23820 31981 49309 63695 96735 83274 20249 88245 68494 12738 60566
49135 25267 06046 23445 05492 27581 15170 93149 21879 59271 80019 40968 86698
68370 37302 20047 53143 38181 09270 80300 17205 93553 05207 00706 07223 39994
63990 57131 15870 99635 77735 90271 96285 06114 65148 37526 20956 53467 13290
02599 43976 63114 54590 26858 98979 11583 70934 19370 44115 51219 20117 16488
05669 45938 13118 38437 65620 62784 63104 90346 29395 00294 58341 16482 41149
69758 32601 18007 31699 43739 35069 66295 71241 02732 39138 74175 49230 71862
45454 32220 39552 73529 52402 45903 80574 45028 92246 88628 53365 42213 81572
21311 63288 11205 21464 89805 18009 20247 19391 71055 53901 13943 31668 15158
28843 68760 69611 02505 17100 73927 62385 55338 62725 53538 83096 06716 44662

37092 26468 09671 25406 18695 02143 17621 16681 40097 59528 14939 07222 60111
26811 53108 38731 76173 23235 26360 58381 73151 03459 57365 38223 53499 29358
22836 85100 78108 84634 34998 35184 04451 70427 01893 81994 24341 00905 75376
25776 75711 18090 08816 41833 19201 96262 34162 88166 52137 47173 25477 72778
34887 74366 51882 87521 56685 71950 63719 36565 39038 94493 66421 76400 31215
27870 22236 64636 35755 50356 55769 48886 54950 02708 53923 61710 55021 31147
41374 41061 34445 54419 21013 36172 99628 56948 99193 36918 47294 78580 72915
60885 10396 78195 94298 33186 48075 60836 79551 49663 64489 65592 94818 78517
84038 77332 62470 51945 05041 98477 42014 18394 77312 02815 88684 57072 90544
05751 06012 85258 05659 47030 46836 34459 26525 52137 00806 87520 09593 45360
73162 26118 72817 39280 74623 09468 53678 23106 09792 15993 60019 94623 79934
34210 68781 34973 46959 24646 97525 06246 95861 69091 78573 97659 51993 92993
99556 75427 14654 91045 68607 02099 01260 68187 04984 17807 91739 24071 94599
63230 60254 70790 17745 27513 18680 99822 84730 86076 65368 66855 51646 77029
11336 82756 31072 23346 72611 37054 90795 36583 45386 37196 23585 63126 18387
15677 41187 38527 72292 25947 43373 78569 55384 56246 80101 39057 27871 01651
29666 36764 45187 24656 53730 40244 36841 40814 48873 29578 47348 49000 30194
77888 02046 03246 60842 87535 18483 64959 19508 28883 23206 52212 81041 90448
04724 79492 91342 28495 19700 22601 31043 00624 10717 97150 27934 33263 40799
59605 31446 05323 04885 28972 91765 98760 16667 81193 79323 72453 85720 96075
82277 17848 33616 13582 61289 62261 18129 45592 74627 67137 79448 75867 53657
54486 14076 11931 12595 85126 55759 73457 30153 33642 63076 79854 43385 76171
53334 62325 27057 20053 03988 28949 90342 59566 23297 57824 88735 02925 91668
25894 45689 46559 92658 45476 26945 28780 51650 17206 74785 41788 79822 76806
53665 06419 10973 43452 88783 38621 72615 62695 82654 47820 56729 87756 42632
53215 94294 41803 99432 17000 09054 26507 63095 58846 58951 71709 14760 74371
36893 31946 90909 81904 50129 03070 99566 22662 03031 82649 36573 36984 19555
77696 37876 24918 85286 56866 07600 56602 56054 45711 33728 68402 05574 41603
08370 52312 24258 72234 38854 12317 94813 88550 07568 93811 24935 38631 86352
87083 79984 56926 19981 79452 33640 87429 59118 07474 53419 55142 03517 26184
20084 55091 70845 68236 82008 97739 45584 26792 14273 47756 08796 44279 20270
83121 50156 40634 13416 17166 44806 98154 83764 49157 39001 21217 04154 78725
91998 94382 53649 50514 77137 93991 47205 21952 90793 96137 62110 72384 94290
61635 76045 96231 25350 60685 37651 42311 53496 65683 71511 66042 20796 39446
66211 63255 15772 90709 78473 15627 82775 98788 13649 19512 57483 32879 37715
71459 09106 48416 42678 30994 97236 74420 17586 22694 02159 40792 44805 41255
36043 13179 92696 73915 75424 19296 60731 23937 63542 13923 06178 76753 95871
14361 04089 40996 60894 71418 34069 83629 93675 36262 15452 47298 46421 37528
91079 88438 13060 95552 62272 08375 18629 83706 67872 24430 19579 37937 86072
10725 42772 89071 73285 48743 74355 78196 65117 16618 33088 11291 20245 20404
86822 00072 34403 50254 48202 83425 41878 84653 60259 15064 45271 65770 00445
21097 73558 58976 22655 48494 16217 14989 53238 34216 00114 06295 07184 90427
78925 85527 43035 22139 68356 79018 07640 60421 38307 30877 44601 70842 68827
22611 77180 84266 43336 51780 00217 19034 49234 26426 62922 61456 00433 73838
68335 55534 34530 04264 81847 39892 15627 08609 56506 29340 40526 49432 44261
44566 59212 91225 64889 35696 55009 15430 64261 34252 66847 25949 14314 23939
88454 32486 32746 18428 46655 98533 23122 10466 25989 01417 12103 44608 42716
16619 00125 71958 70793 21756 96985 44013 39762 20967 49454 18540 71184 46433

94699 01626 98351 60784 89245 14058 94094 63952 67807 35457 97003 07051 16368
25194 87701 18976 40028 27648 41416 05872 06184 18529 71891 54019 68825 32893
09149 66534 57535 71427 31848 20163 84644 83249 90378 86069 00807 27093 27673
12758 19665 63941 14896 17168 32980 45513 97295 06687 60474 09154 20428 42999
35410 25829 11350 22416 90769 43166 85742 42522 50902 69390 34814 85645 13030
69925 19959 04363 84028 42926 74125 73422 44776 55841 77886 17173 72654 62085
49829 44989 46787 35092 95816 52632 07225 89923 68768 45701 78230 38096 56788
31122 89305 80914 05726 10865 88484 58731 01658 15116 75333 27674 88701 48291
67419 70151 25597 82572 70740 64318 08601 42814 90241 46780 47232 75976 84269
63393 57735 42930 18673 94397 16388 61176 42090 04068 66339 88568 41681 00387
23892 14483 17607 01166 84503 88721 23643 67043 31409 11557 33280 18297 79887
36590 91665 96124 02021 77855 88548 76176 16198 93707 94380 05666 33648 84365
08914 48055 71039 76521 46960 27662 58359 90519 87042 30017 94655 36789 ...

Literatur

[1] P. Karlson: Vom Zauber der Zahlen, Ullstein AG, Berlin, 1954

[2] J. Naas, H.L. Schmid (Hrsg.): Mathematisches Wörterbuch, Akademie-Verlag, Berlin / B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart, 1961

[3] M. Hazewinkel (Hrsg.): Encyclopaedia of Mathematics, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Holland, 1988

[4] R. Taschner: Mathematik 2 – Übungs- und Lehrbuch für die 6. Klasse AHS, R. Oldenbourg Verlag, Wien, 1999

[5] E. Maor: Die Zahl e – Geschichte und Geschichten, Birkhäuser Verlag, Basel-Boston-Berlin, 1996

[6] H.-C. Reichel, R. Müller, J. Laub, G. Hanisch: Lehrbuch der Mathematik 6. Verlag Hölder-Pichler-Tempsky, Wien, 1992

[7] L. Leitner, E. Benedikt (Hrsg.): Lehrplan-Service: Mathematik AHS-Oberstufe Kommentar, Österreichischer Bundesverlag, Wien, 1991

[8] D. Dörner: Die Logik des Misslingens, Rowohlt Verlag, Reinbek bei Hamburg, 1989

[9] K. Appelbacher: $\ln x$ auf der Oberstufe; Zur methodischen Behandlung des natürlichen Logarithmus und seiner Umkehrfunktion auf der Oberstufe. Praxis der Mathematik **5** (1963), Seite 321-328

[10] F. Barth: Ein Weg zur Exponentialfunktion. Praxis der Mathematik **7** (1965), Seiten 7-8

[11] H. v. Majewski: Zur Euler-Zahl. Praxis der Mathematik **11** (1969), Seiten 339-341

[12] W. Franz: Kettenbrüche für einige transzendente Funktionen und e. Praxis der Mathematik **9** (1967), Seite 271-275

[13] R. Courant und H. Robbins: Was ist Mathematik?, Berlin, Springer Verlag 1962

[14] G. Walther: Ein unterrichtsnaher Zugang zu dem Satz: Es gibt transzendente Zahlen. Praxis der Mathematik **27** (1985) Nr. 6, Seite 324-327

[15] H. Schickert: Abhandlungen: Die Euler-Gleichung. Praxis der Mathematik **13** (1971), Seite 57-59

[16] H. Möller: Beweis von $e^{iz} = \cos z + i \sin z$ ohne Reihen. Praxis der Mathematik **12** (1970), Seite 92

[17] „Alt, aber kein bisschen heiser“, Spektrum der Wissenschaft **11/1999**, Seite 31, „Spektrogramm“, unter Verweis auf Nature, Band 401, Seite 366

[18] H. Dücker: Zur Einführung der Exponentfunktion. Praxis der Mathematik **5** (1963), Seite 126

[19] P. Bohne: Zur Einführung der e-Funktion innerhalb eines Leistungskurses. Praxis der Mathematik **19** (1977), Seiten 29-33

[20] F. Fricker: Zur Begründung der Exponentialfunktion über Folgen. Praxis der Mathematik **23** (1981) , Seiten 44-48

[21] E. Bähl, D. Rüthing: Die Funktionalgleichung der Exponentialfunktion. Praxis der Mathematik **22** (1980), Seiten 37-40

[22] M. Luoma: Die Euler-Gleichung. Praxis der Mathematik **13** (1971), Seite 199, unter Verweis auf [15]

[23] B. Grabner: Analysis bei Euler – Ein Abriss. Diplomarbeit, Universität Wien, 1996

[24] H. Heuser: Lehrbuch der Analysis (Teil 1), B.G. Teubner Verlag, Stuttgart-Leipzig, 1998

[25] H. v. Majewski: Intervallschachtelungen für *e*. Praxis der Mathematik **15** (1973), Seiten 289-292

[26] K. Röttel: Logarithmus und Exponentialfunktion im Fächerverbund II. Praxis der Mathematik **19** (1977), Seiten 258-265

[27] K. Röttel: Logarithmus und Exponentialfunktion im Fächerverbund III. Praxis der Mathematik **19** (1977), Seiten 286-293

[28] G.H. Hardy, E.M. Wright: An Introduction To The Theory Of Numbers. Oxford, At The Clarendon Press, 1960

[29] A.Baker: Transcendental Number Theory. Cambridge University Press, Cambridge-New York-Port Chester-Melbourne-Sydney, 1975

[30] E. Martensen: Analysis I – Grundlagen der Inifinitesimalrechnung für Mathematiker, Physiker, Ingenieure. B.I.-Hochschultaschenbuch Band 832, Bibliographisches Institut, Mannheim-Leipzig-Wien-Zürich, 1992

[31] Szirucsek, Dinauer, Unfried, Schatzl: Mathematik 6. Ueberreuter Schulbuch, Wien, 1990

[32] H.S.M. Coxeter: Unvergängliche Geometrie (Wissenschaft und Kultur 17). Birkhäuser Verlag Basel und Stuttgart, 1963

[33] S. Gottwald, H.-J. Ilgauds, K.-H. Schlote (Hrsg.): Lexikon bedeutender Mathematiker. Bibliographisches Institut Leipzig, 1990

[34] E.T. Bell: Die großen Mathematiker. Econ-Verlag, Düsseldorf-Wien, 1967

[35] H. Wußing, W. Arnold (Hrsg.): Biographien bedeutender Mathematiker. Aulis Verlag Deubner & Co. KG, Köln, 1985

[36] K. Wörle, J. Kratz, K.-A. Keil: Infinitesimalrechnung. Bayerischer Schulbuch-Verlag, München, 1972

[37] A.J. Hahnenkamp: Radiochemie 1 – Nach einer Vorlesung von Prof. Dr. T. Schönfeld. WUV, Wien, o.J.

[38] A.Trautwein, U. Kreibig, E. Oberhausen: Physik für Mediziner, Biologen, Pharmazeuten. Walter de Gruyter, Berlin-New York, 1987

[39] F. Hohenberg: Kommentar zur Spirale im Epitaph des älteren Jakob Bernoulli. Praxis der Mathematik **26** (1984), Seiten 373-374

[40] W. Vetter: Über die Peripheriewinkel der logarithmischen Spirale. Praxis der Mathematik **25** (1983), Seiten 303-305

[41] R. Stettler: Eine Herleitung der Eulerschen Formel $e^{ix} = \cos x + i \sin x$. Praxis der Mathematik **21** (1979), Seiten 132-134

[42] D. Rüthing: Zur Einführung der Exponentialfunktion über Folgen. Praxis der Mathematik **20** (1978), Seiten 199-204

[43] D. Rüthing: Zur Einführung der Exponentialfunktion über Folgen II. Praxis der Mathematik **21** (1979), Seiten 105-108

[44] L. Kienle: Die Eins-Stelle des natürlichen Logarithmus. In: Praxis der Mathematik **16** (1974), Seiten 98-100

[45] F. Heigl: Grenzverhalten von Exponentialfunktion und Logarithmus. Praxis der Mathematik **11** (1969), Seiten 185-186

[46] H. Bürger, R. Fischer, G. Malle, M. Kronfellner, T. Mühlgassner, F. Schlöglhofer: Mathematik Oberstufe 2, Arbeitsbuch für die 6. Klasse AHS. Verlag Hölder-Pichler-Tempsky, Wien, 1990

[47] G. Kowol: Gleichungen – Eine historisch-phänomenologische Darstellung. Verlag Freies Geistesleben, Stuttgart, 1990

[48] E. Deák: Ein grundsätzlich neuer didaktischer Weg zum Logarithmusbegriff mit ausgeprägten historischen Bezügen. Unveröffentlichtes Manuskript.

[49] P. Hasse, J. Wiesinger : Handbuch für Blitzschutz und Erdung. Richard Pflaum Verlag KG, München – VDE-Verlag GmbH Berlin-Offenbach, 1982.

[50] T.L. Brown, H.E. LeMay, Jr.: Chemie – Ein Lehrbuch für alle Naturwissenschaftler, VCH Verlag, Weinheim, 1988.

Lebenslauf

Stefan Schönhacker

Geboren am 19. Juni 1973 in Horn (Niederösterreich)

Vater Ludwig Schönhacker (AHS-Lehrer i.R.)
Mutter Helga Schönhacker, geb. Schödl (Hausfrau)

1979-1983	Volksschule Horn
1983-1987	AHS-Unterstufe, BG Horn
1987-1991	AHS-Oberstufe, realistischer Zweig, BG Horn
Juni 1991	Matura mit ausgezeichnetem Erfolg

Ab September 1991:
Studium an der Universität Wien:
Lehramt Mathematik und Chemie

Oktober 1998-September 1999:
Ableistung des ordentlichen Zivildienstes
(NÖ Landes-Feuerwehrschule Tulln)

Seit Juli 1988:
Mitglied der Freiwilligen Feuerwehr Horn