Teilbarkeit

eine Aufgabe von Klaus Ronellenfitsch

24. Juni 2006

Zeige das der folgende Term $f(n)$, für alle natürlichen Zahlen n stets einen ganzzahligen Wert besitzt!

$$f(n) = \frac{n^5}{120} - \frac{n^3}{24} + \frac{n}{30} \tag{1}$$

Lösungsvorschlag

Im ersten Schritt klammern wir den Faktor $\frac{n}{120}$ aus :

$$f(n) = \frac{n}{120} \cdot (4 - 5 \cdot n^2 + n^4) \tag{2}$$

Nun bestimmen wir die Nullstelen des Polynoms $p(n)$ mit Hilfe eines Computeralgebraprogramms

$$p(n) = 4 - 5 \cdot n^2 + n^4 \tag{3}$$

und erhalten:

$$p(n) = 0 \quad \rightarrow \quad n_1 = -2, \quad n_2 = -1, \quad n_3 = 1, \quad n_4 = 2 \tag{4}$$

Damit können wir die Funktion $f(n)$ als fortlaufendes Produkt der Schreiben:

$$f(n) = \frac{(n-2) \cdot (n-1) \cdot n \cdot (n+1) \cdot (n+2)}{120} \tag{5}$$

Für $n = 1$ und $n = 2$ ist die Funktion offensichtlich Null. Wir setzen nun $n := n + 2$. Die Zahl 120 entspricht genau 5!.

$$f(n) = \frac{(n) \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3) \cdot (n+4)}{5!} \tag{6}$$