Österliche Fruchtbarkeit für den Kalifen

Spektrum der Wissenschaft

30. März 2001

Das Rätsel von ***Kalif Harun al Hoppel***

Der gute hat über Internet vom christlichen Brauch des Osterfestes erfahren. Besonders die Sache mit den versteckten Eiern und den fleißigen Osterhasen hat es dem tierlieben Monarchen angetan. Und da Harun al Hoppel sowohl weltoffen als auch kurzentschlossen ist, hat er unverzüglich alles in die Wege geleitet, damit dieses Jahr auch in seinem kleinen Kalifat die Kinder nach Herzenslust hinter Palmen und Kakteen nach bunten Leckereien suchen können.

Ein äußerst schwieriger Auftrag, der Anfang des Jahres in der europäischen Osterhasen-Zentralstelle eingegangen ist. Denn der gute Kalif Harun al Hoppel hat ganz genaue Vorstellungen, wie die Feierlichkeiten abzulaufen haben. Gleichzeitig ist er jedoch - wie alle Staatschefs dieser Erde - chronisch knapp bei Kasse. Also müssen die Osterhasen sorgfältig planen, und sie dürfen sich keine Panne leisten. Abgesehen von dem Umstand, daß die Ostereier in der Oase des Kalifen nicht vorgekocht, die Schokoladenfiguren aber mit einem geschmacksneutralen, ungiftigen und ökologisch unbedenklichen Kühlmittel gefüllt sein müssen, ist die Anzahl der notwendigen Hasen für diesen Außenauftrag von entscheidender Bedeutung. Es dürfen nicht mehr als unbedingt notwendig sein (um Kosten zu sparen), aber am Ostersonntag müssen genau 1999 Osterhasen in den traditionellen Kostümen zur Stelle sein und fröhlich lächelnd über das Gelände hoppsen. Also schicken wir ein gemischtes Kleinteam hin, daß sich im Kalifat unverzüglich an die Vermehrung macht, denkt sich der Oberosterhase, wie Hasen und Kaninchen (die häufig als Unterstützungs- und Hilfshoppler eingesetzt werden) das eben tun. Wegen des Zeitdrucks - zum Zeitpunkt des Auftragseingangs waren es nur noch neun Wochen bis zum Fest - kommen nur die neugezüchteten Ex-und-hopps in Frage, die innerhalb von einer Woche fortpflanzungsfähig werden.
Jetzt brauchen wir nur noch zu berechnen, wieviele Paare geschlechtsreifer Alttiere und wieviele Paare Junghasen sich auf den Weg machen müssen, damit in der zehnten Woche genau 1999 fitte erwachsene Mümmelfrauen und -männer den Dienst beim Kalifen antreten können. Oder anders ausgedrückt: Gesucht sind die ersten beiden Elemente jener Fibonacci-Folge, deren zehntes Glied gleich 1999 ist. Aber so viel Erläuterungen benötigt ein Alter Hase wie Sie bestimmt gar nicht zum Lösen der Aufgabe. (Punktezahl=6)

Auflösung des Rätsels

Die originale Fibonacci-Folge ist rekursiv definiert:

$$F_1 = 1, \quad F_2 = 1, \quad F_i := F_{i-1} + F_{i-2} \tag{1}$$

Die ersten zehn Glieder der Folge lauten damit:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55 \tag{2}$$

In der Aufgabe ist eine modifizierte Fibonacci-Folge L_i gesucht, bei der $L_{10} = 1999$ beträgt. Zahlenfolgen der Art

$$L_i := L_{i-1} + L_{i-2}, \qquad L_1 = k,\ L_2 = m \quad k, m \in Z \tag{3}$$

werden nach ihrem Endecker Lucas-Folgen genannt. Jede Lucas-Folge läßt sich auf die Fibonacci-Folge zurückführen /1/:

$$L_{i+1} := L_1 \cdot F_{i-1} + L_2 \cdot F_i \tag{4}$$

Für $i = 9$ erhalten wir

$$L_{10} = 1999 = L_1 \cdot F_8 + L_2 \cdot F_9 = 21 \cdot L_1 + 34 \cdot L_2 \tag{5}$$

Damit haben wird eine diophantische Gleichung zur Bestimmung der Startelemente der gesuchten Lucas-Folge. Für diophantische Gleichungen mit zwei Unbekannten gilt der spezielle Lösungsalgorithmus:

Satz Seien a, b, c ganze Zahlen mit $a, b \neq 0$, sei $GGT(a, b) = d$ wobei d teilt c gelte und für die ganzen Zahlen x_0, y_0 gelte:

$$ax_0 + by_0 = d \tag{6}$$

Dann hat die lineare diophantische Gleichung

$$aX + bY = c \tag{7}$$

genau die ganzzahligen Lösungen:

$$\left(\frac{cx_0 + bt}{d}, \frac{cy_0 - at}{d} \right), \qquad t \in Z \tag{8}$$

Zunächst prüfen wir die Lösbarkeit unserer Gleichung:

$$1999 = 21 \cdot L_1 + 34 \cdot L_2, \qquad d = GGT(21, 34) = 1 \tag{9}$$

Der GGT von 21 und 34 beträgt 1. Die Gleichung besitzt damit unendlich viele Lösungen.

Wir bestimmen mit Hilfe von ARIBAS /2/ ein Lösungpaar (x_0, y_0) für die reduzierte Gleichung:

$$1 = 21 \cdot x_0 + 34 \cdot y_0, \quad \rightarrow \quad x_0 = 13, y_0 = -8 \tag{10}$$

Nach Multiplikation mit 1999 erhalten wir als Lösungsmengen :

$$L_1 = x_0 \cdot 1999 + t \cdot 34, \qquad L_2 = y_0 \cdot 1999 - t \cdot 21, \qquad t \in Z \tag{11}$$

Für $t = -764$ folgt als Lösungspaar $L_1 = 11$, $L_2 = 52$.

Die gesuchte Lucas-Folge bis zum zehnten Glied lautet:

$$11, 52, 63, 115, 178, 293, 471, 764, 1235, 1999 \tag{12}$$

Es müssen damit 11 Paare Althasen und 52 Paare Junghasen entsandt werden, um nach 10 Wochen insgesamt 1999 Osterhasen zu haben.

Literatur

/1/ Scheidt,H. : Zahlentheorie , 2. Auflage 1998, Wissenschaftsverlag Mannheinm
/2/ Forster,O. : Algorithmische Zahlentheorie, 1. Auflage 1999, Vieweg Verlag