Ein Käferspaziergang auf Körperkanten

Einleitung

Die Idee zu dieser Arbeit entstand an einem langweiligen Samstagabend: Noch nicht einmal das Würfelspiel mit meiner Schwester machte mir Spaß, da sah ich auf dem schon einige Zeit unberührten Würfel eine Fliege entlang spazieren. Wie lange würde das Insekt wohl von einer Würfelecke zu einer anderen im Mittel brauchen, wenn es sich dabei lediglich auf den Körperkanten zufällig fortbewegen kann?

> Problemstellung:
> ***Ein Käfer bewege sich auf den Kanten eines regelmäßigen Polyeders. Dabei benötigt er von einer Ecke zu einer benachbarten stets 1 Minute und wählt an jedem Eckpunkt zufällig und unverzüglich die nächste Kante aus. Wie lange benötigt das Insekt durchschnittlich, um von einer Ecke S(tart) zu einer anderen Ecke Z(iel) zu gelangen?***

Tetraeder

Ich beginne meine Untersuchung am einfachsten Platonischen Körper, einem Tetraeder $ABSZ$ (vgl. Abb. 1). Alle Eckpunkte des Tetraeders sind bezüglich der Problemstellung gleichberechtigt: Ein Käfer hat stets 3 Möglichkeiten für seinen weiteren Weg zur Auswahl und von jedem Eckpunkt des Tetraeders ist das Ziel Z über *eine* Kante zu erreichen. Für die Bestimmung der durchschnittlichen Dauer eines Käferlaufes von S nach Z habe ich 2 Möglichkeiten bearbeitet.

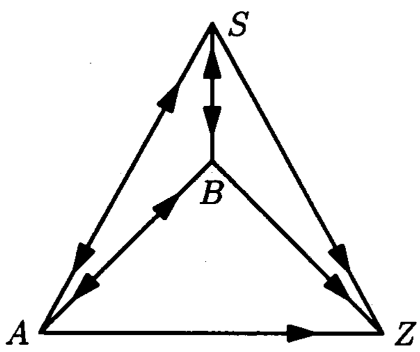

Abb. 1: Tetraeder

1. Lösungsmöglichkeit:

Zunächst möchte ich die Wahrscheinlichkeit $P(n)$ dafür bestimmen, daß der Käfer in genau n Minuten von S nach Z läuft. Da jeder Weg über n Kanten gleichwahrscheinlich ist, genügt es, die Anzahl $A(n)$ dieser Wege zu bestimmen. Offenbar gilt $A(1) = 1$, und durch Probieren findet man leicht $A(2) = 2,\ A(3) = 4,\ A(4) = 8$.

Die Vermutung $A(n+1) = 2 \cdot A(n)$ kann durch folgende Überlegung bestätigt werden: Seinen Weg über $n+1$ Kanten beginnt der Käfer in S und geht von dort entweder nach A oder B ($n > 1$). Da A, B und S bezüglich Z gleichwertig sind, gibt es für ihn jetzt jeweils $A(n)$ Fortsetzungen. Für die Wahrscheinlichkeit $P(n)$ folgt damit

$$P(n) = \frac{2^{n-1}}{3^n} \tag{1}$$

Für die mittlere Anzahl der Minuten M ergibt sich daraus[1]:

$$\begin{aligned} M &= \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{2}{3^2} \cdot 2 + \frac{2^2}{3^3} \cdot 3 + \cdots + \frac{2^{n-1}}{3^n} \cdot n + \cdots \\ &= \frac{1}{3} \cdot (1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \cdots) + \frac{2}{3^2} \cdot (1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \cdots) \\ &\quad + \frac{2^2}{3^3} \cdot (1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \cdots) + \cdots \\ &= 1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \cdots = 3 \end{aligned} \tag{2}$$

2. Lösungsmöglichkeit:

Wieder sei M die durchschnittliche Minutenzahl, die der Käfer von S nach Z benötigt. Dieser läuft von S mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{3}$ direkt nach Z und mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{2}{3}$ nach A oder B. Von dort benötigt er wiederum M Minuten und damit gilt:

$$M = \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot (M + 1) \qquad \Rightarrow \qquad M = 3 \tag{3}$$

Der Käfer benötigt also im Durchschnitt 3 Minuten, um von einer beliebigen Körperecke zu einer anderen zu gelangen.

Oktaeder

Ich arbeite mit der ersten Lösungsmöglichkeit und betrachte einen Oktaeder mit beliebiger Zielecke Z. Bezüglich Z gibt es 4 direkt benachbarte Körperecken, eine Ecke liegt Z gegenüber. Der Käfer starte zunächst in einer zu Z benachbarten Ecke S. Jeder Weg von S nach Z über n Kanten hat die Wahrscheinlichkeit $\left(\frac{1}{4}\right)^n$, $n > 0$.

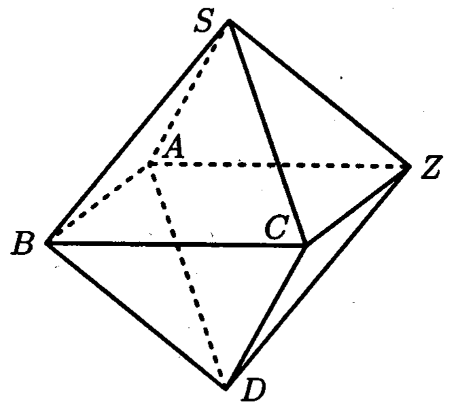

Abb. 2: Oktaeder

[1] Es handelt sich dabei offenbar um eine absolut konvergente Reihe, was die folgenden Umformungen erlaubt.

Für $P(n)$ muß man noch die Anzahl möglicher Wege bestimmen. Durch Probieren findet man $A(1) = 1$, $A(2) = 2$, und für $n = 3$ ist mit den möglichen Wegen $SASZ$, $SADZ$, $SCSZ$, $SCDZ$, $SBSZ$, $SBAZ$, $SBCZ$, $SBDZ$ $A(3) = 8$.

Für $n = 4$ starte der Käfer wiederum in S. Von dort kann er nach A, C oder B laufen. Von A und C aus hat er jeweils $A(3)$ Möglichkeiten, um nach Z zu gelangen, denn diese beiden Punkte sind bezüglich Z zu S gleichwertig. Von B aus läuft der Käfer über eine weitere Kante zu einem zu Z benachbarten Punkt und hat von dort jeweils $A(2)$ Möglichkeiten, um weiter nach Z zu gehen. Die Verallgemeinerung dieser Argumentation führt zu der Gleichung

$$A(n) = 2 \cdot A(n-1) + 4 \cdot A(n-2), \; n \geq 3 \tag{4}$$

(4) erinnert an Fibonaccizahlen, die sich über die Vorschrift $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, $n \geq 3$ definieren lassen und für die man in Tabellenwerken die explizite Formel

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right], \; n \geq 1 \tag{5}$$

findet.

Offenbar gilt $A(1) = F_1$, $A(2) = 2 \cdot F_2$, $A(3) = 4 \cdot F_3$, und mit (4) bestätigt man leicht

$$A(n) = 2^{n-1} \cdot F_n = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{5}} \cdot \left[(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n \right], \; n \geq 1 \tag{6}$$

Für die durchschnittliche Laufzeit $M = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{A(n)}{4^n} \cdot n$ ergibt sich durch Einsetzen von (6) und Umordnen:[2]

$$\begin{aligned} M &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2 \cdot \sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{4} \right)^n \right] \\ &= \frac{1}{2 \cdot \sqrt{5}} \cdot \left[\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{4} \right)^n - \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{4} \right)^n \right] \\ &= \frac{1}{2 \cdot \sqrt{5}} \cdot \left[\frac{\frac{1+\sqrt{5}}{4}}{\left(1 - \frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2} - \frac{\frac{1-\sqrt{5}}{4}}{\left(1 - \frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^2} \right] \end{aligned}$$

[2] Man prüft leicht nach, daß die Reihe wegen der Konvergenzeigenschaften der Fibonaccizahlen $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{F_n}{F_{n+1}} = (-1+\sqrt{5})/2$ absolut konvergent ist.

$$= \frac{16}{8\cdot\sqrt{5}} \cdot \left[\frac{1+\sqrt{5}}{\left(3-\sqrt{5}\right)^2} - \frac{1-\sqrt{5}}{\left(3+\sqrt{5}\right)^2} \right] = 5 \qquad (7)$$

Der Käfer benötigt also im Mittel 5 Minuten, um von einer zu Z benachbarten Ecke S nach Z zu gelangen.

Wählt man als Startpunkt die Z gegenüberliegende Ecke, so erreicht der Käfer über eine Kante eine zu Z benachbarte Ecke. Er benötigt also im Mittel 6 Minuten, um von einer Körperecke zur gegenüberliegenden zu gelangen.

Würfel

Für diese und die folgenden Betrachtungen verwende ich nur noch meinen 2. Lösungsansatz. Ich wähle eine Ecke des Würfels als Ziel und untersuche, wie lange ein Käfer durchschnittlich braucht, um von einer anderen Ecke dorthin zu gelangen. Unter diesen Ecken gibt es 3 direkt zu Z benachbarte Ecken, 3 Ecken, die nicht zu Z benachbart sind, aber mit Z auf einer Würfelseite liegen und eine Z gegenüberliegende Ecke. Für die jeweiligen durchschnittlichen Laufzeiten a, b, c gilt aufgrund der geometrischen Eigenschaften des Würfels:

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{3}\cdot 1 + \frac{2}{3}\cdot (b+1) \\ b &= \frac{2}{3}\cdot (a+1) + \frac{1}{3}\cdot (c+1) \\ c &= b+1 \end{aligned} \qquad (8)$$

(8) hat die eindeutigen Lösungen $a = 7$, $b = 9$, $c = 10$. Der Käfer benötigt also beispielsweise von einer Körperecke zur gegenüberliegenden im Durchschnitt 10 Minuten.

Dodekaeder und Ikosaeder

Sei eine beliebige Ecke Z des Dodekaeders Ziel der Käferwanderung. Dann gibt es 3 direkt benachbarte Ecken, 6 Ecken, die von Z 2 Kanten „entfernt" sind, 6 weitere, die 3 Kanten, 3, die von Z 4 Kanten „entfernt" sind und eine gegenüberliegende Ecke. Bezeichnet man die jeweiligen durchschnittlichen Laufzeiten mit a, b, c, d und e, so gilt das folgende Gleichungssystem:

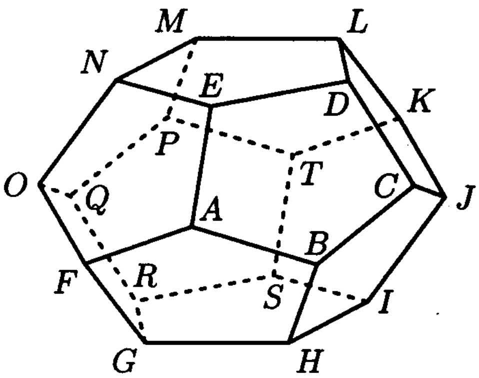

Abb. 3: Dodekaeder

$$\begin{aligned}
a &= \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot (b+1) \\
b &= \frac{1}{3} \cdot (a+1) + \frac{1}{3} \cdot (b+1) + \frac{1}{3} \cdot (c+1) \\
c &= \frac{1}{3} \cdot (b+1) + \frac{1}{3} \cdot (c+1) + \frac{1}{3} \cdot (d+1) \\
d &= \frac{2}{3} \cdot (c+1) + \frac{1}{3} \cdot (e+1) \\
e &= d+1
\end{aligned} \tag{9}$$

(9) hat die eindeutigen Lösungen $a = 19$, $b = 27$, $c = 32$, $d = 34$, $e = 35$. Damit braucht der Käfer beispielsweise von einer Körperecke zur gegenüberliegenden im Durchschnitt 35 Minuten.

Bei einem Ikosaeder mit beliebig gewählter Ecke Z gibt es 5 direkt benachbarte Ecken, 5 Ecken, die von Z 2 Kanten „entfernt" sind und eine gegenüberliegende Ecke.
Daraus ergibt sich für die entsprechenden mittleren Laufzeiten a, b, c des Käfers das Gleichungssystem

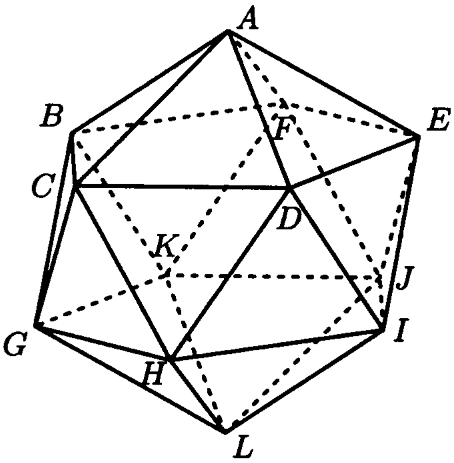

Abb. 4: Ikosaeder

$$\begin{aligned}
a &= \frac{1}{5} + \frac{2}{5} \cdot (a+1) + \frac{2}{5} \cdot (b+1) \\
b &= \frac{2}{5} \cdot (a+1) + \frac{2}{5} \cdot (b+1) \cdot \frac{1}{5} \cdot (c+1) \\
c &= (b+1)
\end{aligned} \tag{10}$$

mit den eindeutigen Lösungen $a = 11$, $b = 14$, $c = 15$. Der Käfer benötigt also beispielsweise von einer Körperecke zur gegenüberliegenden im Durchschnitt 15 Minuten.

Variationen und Ausweitungen der Problemstellung sind unter verschiedenen Gesichtspunkten möglich. Ich habe unter anderem derartige Betrachtungen auch für andere ausschließlich durch regelmäßige n-Ecke begrenzte Polyeder durchgeführt. Man erhält dann beispielsweise nicht immer ganzzahlige durchschnittliche Laufzeiten des Käfers.

Literaturverzeichnis

[1] Becker, M.-F.; Boortz, G.; Dietrich, V. u. a.: *Formeln und Tabellen für die Sekundarstufen I und II.* Paetec, Berlin 1996.

[2] Gellert, W.; Kästner, H.; Neuber, S. (Hrsg.): *Lexikon der Mathematik.* Bibliographisches Institut Leipzig, Leipzig 1977.

Christine Licht, Erfurt

Anmerkung der Redaktion:

Ein Ziel der $\sqrt{Wurzel}$ - Redaktion ist es, mathematisch interessierten Schülerinnen und Schülern Gelegenheit zu geben, ihre Arbeiten in dieser Zeitschrift einem größeren Publikum vorzustellen. Dabei geht es uns in erster Linie auch darum, die originalen kreativen Fragestellungen, die individuellen Arbeitsprozesse und Ergebnisse aufzuzeigen. Wir werden uns bemühen, unvermeidliche Kürzungen in der Darstellung jeweils so vorzunehmen, daß der „Charakter" der Arbeit möglichst erhalten bleibt. In diesem Zusammenhang verzichten wir auch weitgehend auf Ausweitungen und Vertiefungen sowie eine nachträgliche Einführung mathematischer Begriffe und Verfahren, die eine andere und eventuell - wenn man erst einmal über den entsprechenden Apparat verfügt - kürzere Bearbeitung ermöglichen würden. Vielleicht werden diese Artikel so auch von dem einen oder anderen Leser als eine willkommene Gelegenheit zum „Weiterdenken" angenommen.
Der vorliegende Beitrag stellt die Zusammenfasung einer Arbeit dar, mit der sich Christine Licht, Schülerin des Erfurter Albert-Schweitzer-Gymnasiums, am vorjährigen „Jugend forscht"-Wettbewerb beteiligte.

Lösungen der $\sqrt{\text{WURZEL}}$–Aufgaben aus Heft 7/99 bis 12/99

Die Redaktion bedankt sich bei Anke Heinrich, Stefan Schwarz, Steffen Kläre, besonders aber bei Hans Rudolf Moser, für ihre Mitarbeit beim Zustandekommen dieser Lösungsbesprechung.