Kreisberührungen Teil 2

aus Denken und Handeln

http://users.skynet.be/denkendehanden/sangaku.html

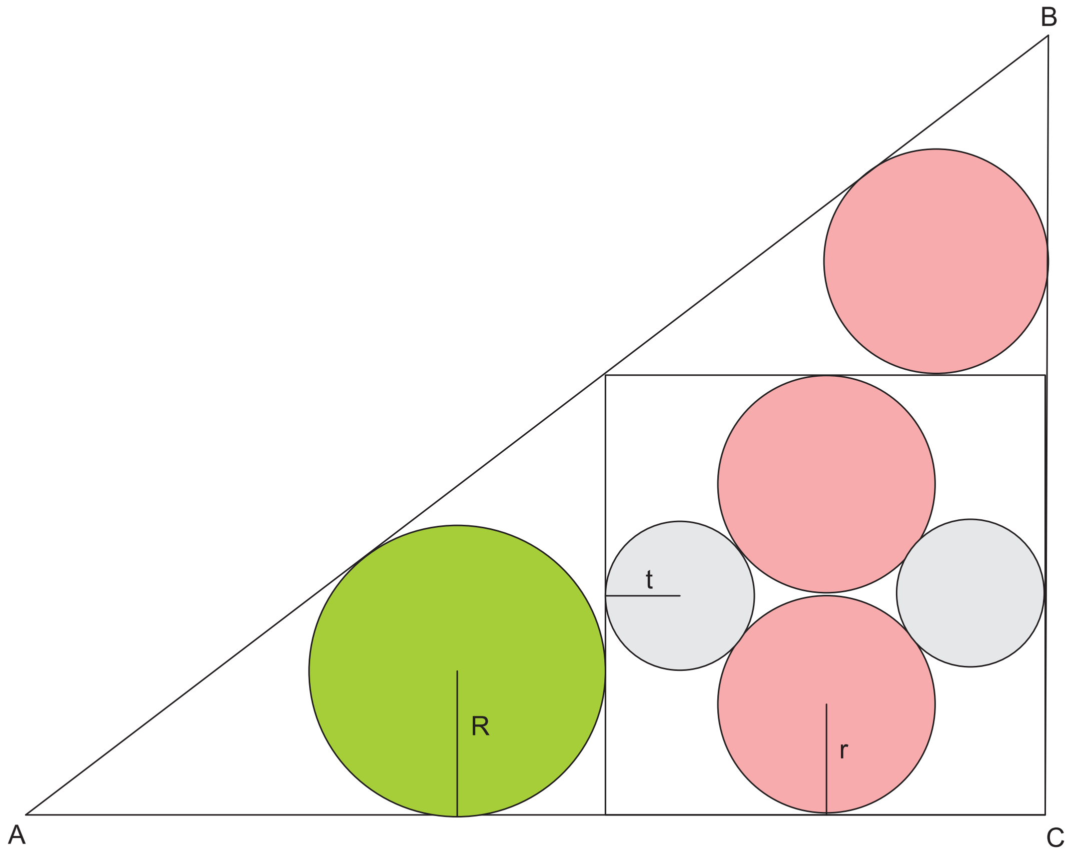

Abbildung 1: Skizze zur Aufgabenstellung

Zwei Kreise mit Radius r und zwei kleinere Kreise mit Radius t sind einem Quadrat eingeschrieben. Das Quadrat selbst ist einem rechtwinkligen Dreieck ABC eingeschrieben. In den sich dabei ergebenden Teildreiecken befindet sich wiederum ein Kreis mit Radius r und größerer Kreis mit Radius R wie in Abbildung 1 gezeigt. Bestimme das Verhältnis der Radien $R \div t$.

Lösungsvorschlag

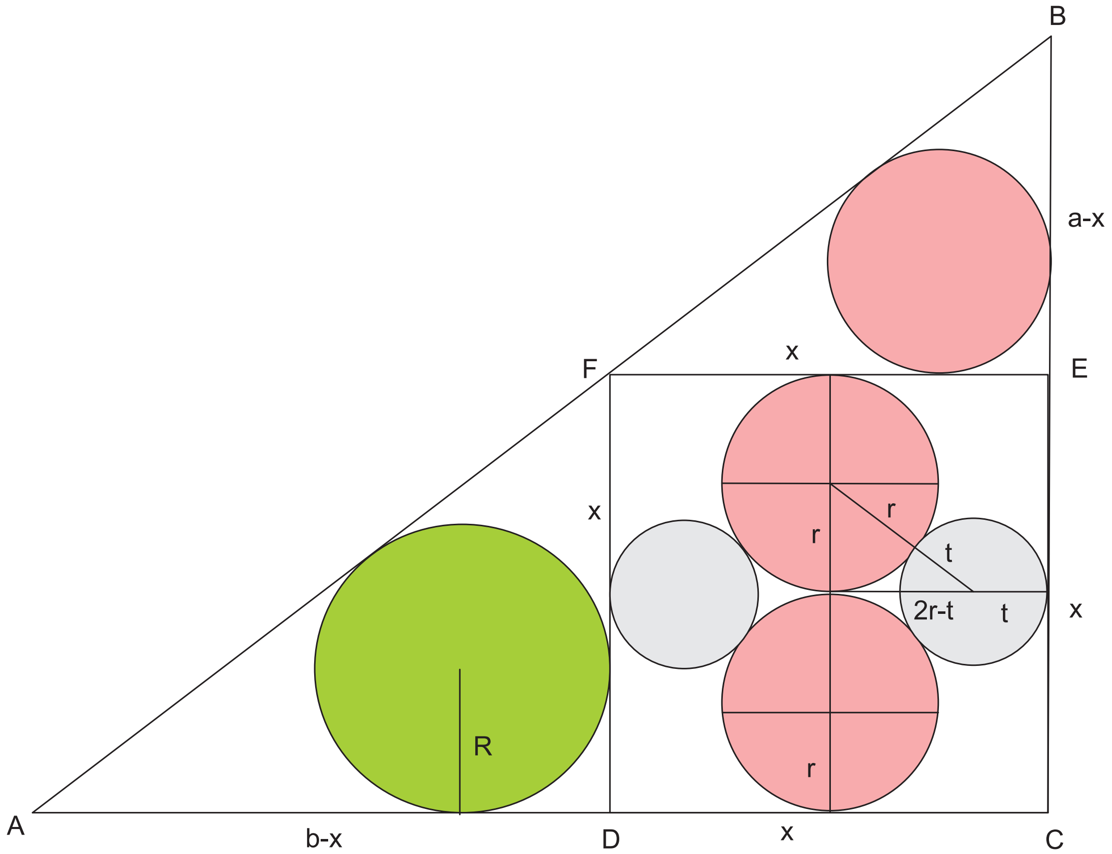

Abbildung 2: Lösungsskizze

Es seien die Punkte- und Streckenbezeichner aus Abbildung 2 gewählt. Im inneren des Quadrates können wir mit Hilfe des Pythagoras eine Beziehung zwischen den Kreisradien r und t ableiten:

$$x = 4\,r \qquad\qquad r^2 + (2\,r - t)^2 = (r + t)^2 \quad \rightarrow \quad r = \frac{3}{2}\,t \tag{1}$$

Eine Schwierigkeit bei dieser Aufgabe ist es zu erkennen, dass die gezeigte Konstellation nur für ein ganz bestimmtes Seitenverhältnis $a \div b$ des Dreiecks möglich ist. Das wird deutlich unter Benutzung eines Programms der dynamischen Geometrie wie GeoGebra. Zunächst berechnen wir aus a, b die Seitenlänge x des Quadrates:

$$\frac{a - x}{x} = \frac{a}{b} \quad \rightarrow \quad x = \frac{a\,b}{a + b} \tag{2}$$

Aus der Berührung der beiden Kreise im Quadrat folgt die Bedingung:

$$x = 4 \cdot r \tag{3}$$

Weiterhin soll der Inkreisradius vom Dreieck FEB ebenfalls r sein:

$$r = \frac{x + (a - x) - \sqrt{x^2 + (a - x)^2}}{2} \quad \rightarrow \quad \frac{x}{4} = \frac{x + a - x + \sqrt{x^2 + (a - x)^2}}{2} \tag{4}$$

$$x = \frac{4}{7}\, a \tag{5}$$

Das Ergebnis setzen wir in (2) ein und erhalten:

$$x = \frac{a\, b}{a + b} = \frac{4}{7}\, a \quad \rightarrow \quad b = \frac{4}{3}\, a \tag{6}$$

Für die Radien der Inkreise erhalten wir nun:

$$2\, R = (b - x) + x - \sqrt{(b - x)^2 + x^2} \quad \rightarrow \quad 7\, R = 8\, b \tag{7}$$

$$2\, r = (a - x) + x - \sqrt{(a - x)^2 + x^2} \quad \rightarrow \quad 7\, r = 6\, b \tag{8}$$

$$\tag{9}$$

Das Verhältnis der Radien beträgt also

$$\frac{R}{r} = \frac{4}{3} \quad \rightarrow \quad r = \frac{3}{2}\, t \quad \rightarrow \quad \frac{2R}{3\, t} = \frac{4}{3} \quad \rightarrow \quad R = 2\, t \tag{10}$$

Der Radius R vom großen Kreis ist genau doppelt so groß wie der von den beiden kleineren Kreisen im Quadrat.