Flächenteilung im Dreieck

aus Sacred Mathematics - Japanese Temple Geometry

Tony Rothmann

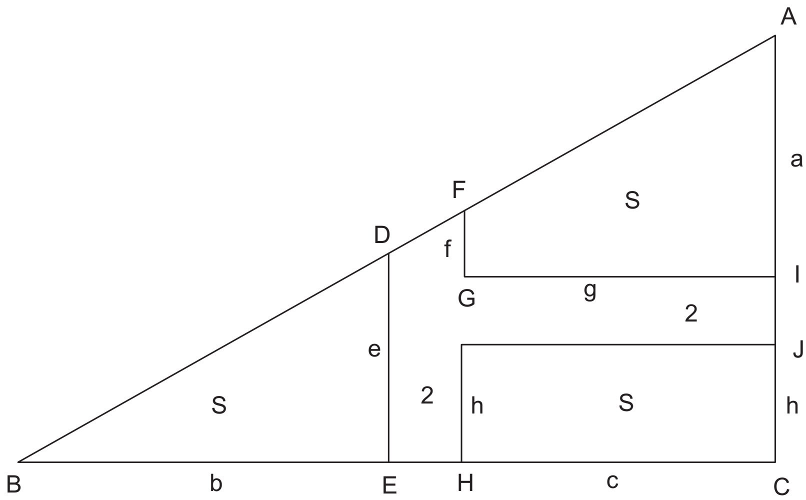

Abbildung 1: Skizze zur Aufgabenstellung

Gegeben sei das rechtwinklige Dreieck ABC mit den Seitenlängen $AC = 30$ und $BC = 40$. Dem Dreieck sind zwei Vierecke und ein Dreieck einbeschrieben, wie in Abbildung 1 gezeigt. Der eingezeichnete Zwischenraum (Pfad) im inneren von ABC ist je 2 m breit. Bestimme die Abmaße b, c, e, f, g, h so dass die Flächen S vom Dreieck und den beiden Vierecken je gleich groß sind.

Lösungsvorschlag

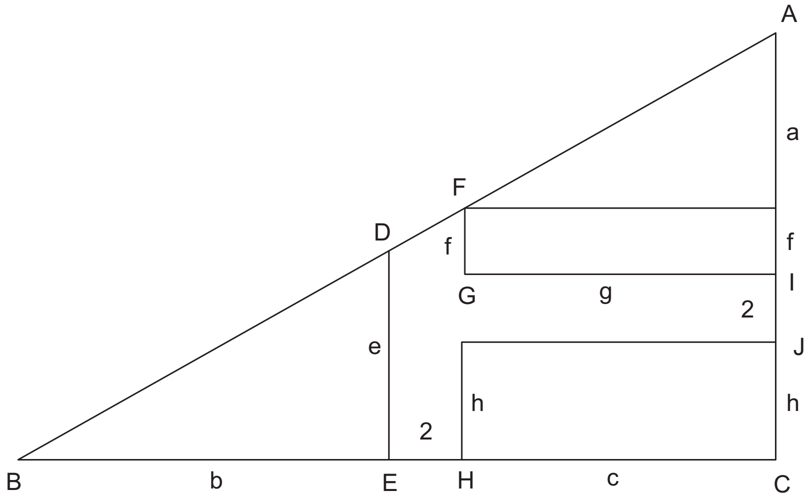

Abbildung 2: Lösungsskize zur Berechnung der Flächen

Es seien die Punkte- und Streckenbeziechner nach Abbildung 2 gewählt. Für die Seiten BC und AC erhalten wir als Längenbilanz:

$$\overline{BC} = b + 2 + c = 40, \quad \overline{AC} = a + f + 2 + h = 30 \tag{1}$$

Für die Flächeninhalte ergeben sich die Gleichungen:

$$S_{BED} = \frac{b \cdot e}{2}, \quad S_{HCJK} = c \cdot h, \quad S_{FGIA} = f \cdot g + \frac{a \cdot f}{2} \tag{2}$$

Die Dreiecke $\triangle ABC, \triangle DBE$ und $\triangle FBH$ sind einander ähnlich und es gilt:

$$\frac{AC}{BC} = \frac{30}{40} = \frac{e}{b} = \frac{f + 2 + h}{b + 2} \tag{3}$$

Die Flächensumme im Dreieck muss der Gesamtfläche vom Dreieck ABC entsprechen:

$$\triangle ABC = \frac{AC \cdot BC}{2} = \frac{b \cdot e}{2} + c \cdot h + f \cdot g + \frac{a \cdot f}{2} + 2 \cdot c + 2 \cdot e + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{3}{4} \tag{4}$$

Die Auflösung der Gleichungen (1) ... (4) ergibt im Programm Mathematica:

$$a = \frac{1}{6}\left(170 - \sqrt{9406}\right), \quad b = \frac{2}{9}\left(1 + \sqrt{9406}\right), \quad c = \frac{2}{9}\left(170 - \sqrt{9406}\right), \tag{5}$$

$$e = \frac{1}{6}\left(1 + \sqrt{9406}\right), \quad f = \frac{1}{8}\left(\sqrt{9406} - 58\right), \tag{6}$$

$$g = \frac{103373\sqrt{9406} - 106786}{326268}, \quad h = \frac{1}{24}\left(166 + \sqrt{9406}\right) \tag{7}$$

und als numerische Näherung:

$$a = 12.1692, \quad b = 21.7743, \quad c = 16.2257, \quad e = 16.3308, \tag{8}$$

$$f = 4.87307, \quad g = 30.4008, \quad h = 10.9577 \tag{9}$$