Das Würfelspiel auf dem Jahrmarkt

eine Aufgabe von Swen Lünig, Petershagen b. Berlin

24. Juni 2006

Nachdem Daniela auf dem in ihrem Heimatort stattfindenden Jahrmarkt die schwindelerregenden Attraktionen probiert hat, steht ihr der Sinn nach etwas Beruhigenderem. Sie schlendert an den verschiedenen Verkaufsständen vorbei, als ihr eine Menschentraube an einem Stand auffällt.
'Die Gewinnwahrscheinlichkeit ist doppelt so hoch wie die Wahrscheinlichkeit zu verlieren', verspricht lautstark Würfelwilly, der Inhaber des Standes. Er erklärt weiter: 'Wer beim ersten Versuch eines Spiels eine 6 würfelt, hat schon gewonnen und bekommt 3 Euro bar auf die Hand. Falls mehrere Würfe nötig sind, eine 6 zu würfeln, gibt es für jeden gemachten Wurf 3 Euro.' Das hört sich ja ziemlich vielversprechend an, denkt Daniela und lauscht in Erwartung eines Hakens an der Sache weiter den Erklärungen von Würfelwilly.
'Aber meiden Sie die Unglückszahl 1. Wer eine 1 würfelt, lädt einen Fluch auf sich und kann nicht mehr gewinnen, bis er eine 6 würfelt und so den Fluch aufhebt. Jede andere Augenzahl als 1 oder 6 lässt den Fluch weiterbestehen. Solange der Fluch besteht, kann der Unglückselige verlieren, wenn er eine 1 würfelt. Dann muss er pro gemachten Wurf 4 Euro bezahlen und ist von dem Fluch befreit und kann ein neues Spiel wagen. Nur wenn der Spieler frei von einem Fluch ist, kann er mit einer 6 gewinnen und pro gemachten Wurf 3 Euro kassieren.'
Einige der zuhörenden Leute sind neugierig geworden und wagen einige Spiele mit den drei Assistenten von Würfelwilly. Dieser erfreut unterdessen die Menschen mit dem Verteilen von Gratiswürfeln und gibt noch einige Hinweise, um auch die letzten Zweifler zu überzeugen: 'Meine Damen und Herren! Bedenken Sie, dass die Gewinnwahrscheinlichkeit doppelt so hoch wie die Verlustwahrscheinlichkeit ist und Sie bei einem verlorenen Spiel nicht 6 Euro pro Wurf sondern nur 4 Euro zahlen müssen. Die verwendeten Würfel sind von der internationalen Glückspielkommission zugelassen und bevorzugen keine der Augenzahlen.'
Ist die Gewinnwahrscheinlichkeit tatsächlich doppelt so gro's wie die Verlustwahrscheinlichkeit?
Wieviel Würfe sind bei einem gewonnenen und bei einem verlorenen Spiel zu erwarten?

Lösungsweg I, Computersimulation

Aufstellung des Zustandsgraphen

Im ersten Lösungsschritt versuchen wir ein Modell zum Würfelspiel aufzustellen. Wir können vier Zustände unterscheiden :

1. Zustand *kein Fluch*, Spieler kann mit einer 6 gewinnen,
2. Zustand *Fluch*, Spieler kann mit einer 1 verlieren,
3. Zustand *Gewonnen*, Spieler hat gewonnen und kann ein neues Spiel beginnen
4. Zustand *Verloren*, Spieler hat verloren und kann eine neues Spiel beginnen

Abbildung 1 zeigt den Zustandgsraph mit den Übergangswahrscheinlichkeiten.

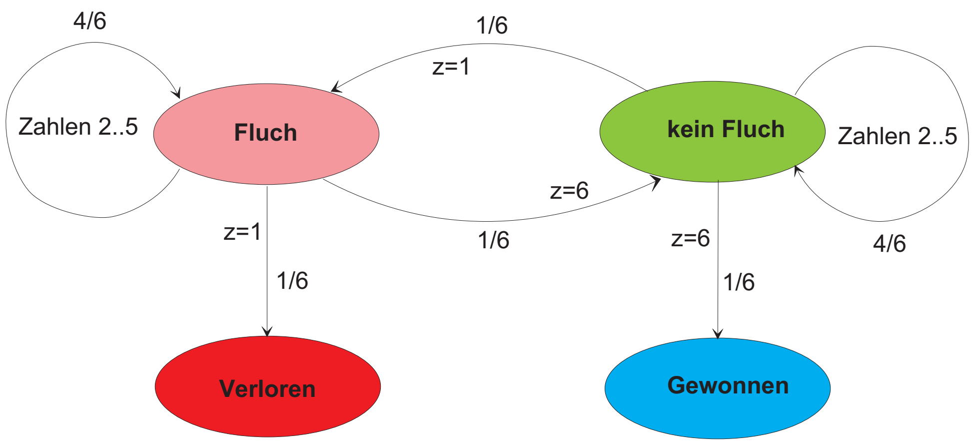

Abbildung 1: Zustandsgraph zum Würfelspiel

Zwischen den Zuständen *Fluch* und *nicht Fluch* wechselt der Spieler mit einer 1 bzw. einer 6 (Übergangswahrscheinlichkeit $= 1/6$). Mit den Zahlen $2 \ldots 5$ verharrt der Spieler im jeweiligen Zustand *Fluch* bzw. *nicht Fluch* (Übergangswahrscheinlichkeit $= 4/6$).
Vom Zustand *nicht Fluch* nach *Gewonnen* wird eine 6 benötigt. Würfelt der Spieler im Zustand *Fluch* eine 1 ist das Spiel verloren.

Computersimulation

Der Zustandgraph kann mit Hilfe eines Computerprogramms für mehre tausend Spielversuche simuliert werden. Im Mittelwert erhalten wir daraus :

1. den bedingten Erwartungswert $EW[g]$ für die Anzahl an Würfen bis zum Zustand *Gewonnen* ,
2. die Gewinnwahrscheinlichkeit $P[Gewinn]$ für ein Spiel,
3. den bedingten Erwartungswert $EW[v]$ für die Anzahl an Würfen bis zum Zustand *Verloren*.
4. die Verlustwahrscheinlichkeit für ein Spiel $P[Verlust]$,

Während der Simulation können die Zahlenwerte schnell den für Programmiersprachen üblichen Integerbereich von 2^{32} überschreiten. Es ist deshalb notwendig, einen Zahleninterpreter zu nutzen, der über eine quasi unbgrenzte Ganzzahlarithmetik verfügt. Das Programm ARIBAS ist ein solcher Interpreter. Er steht im Internet kostenlos zur Verfügung:

`http://www.mathematik.uni-muenchen.de/~forster/sw/aribas.html`

Die Programmiersprache ist ähnlich mit PASCAL / MODULA-2.
Die Funktion `wurf(n)` (siehe folgende Seite) simuliert einen $n-$ maligen Spielversuch, wobei als Abbruchkriterium der Zustand *Gewonnen* oder *Verloren* dient. Für $n = 100.000$ erhalten wir folgende Ergebnisse :

$$EW[g] = 5, \quad P[Gewinn] = \frac{2}{3}; \qquad EW[v] = 8, \quad P[Verlust] = \frac{1}{3} \tag{1}$$

Demnach ist die Gewinnwahrscheinlichkeit tatsächlich doppelt so hoch wie die Verlustwahrscheinlichkeit. Betrachten wir nun den tatsächlichen Gewinn für ein Spiel:

$$G = 3 \cdot EW[g] \cdot P[Gewinn] - 4 \cdot EW[v] \cdot P[Verlust] \tag{2}$$

$$G = 3 \cdot 5 \cdot \frac{2}{3} - 4 \cdot 8 \cdot \frac{1}{3} = \frac{30}{3} - \frac{32}{3} = -\frac{2}{3} \tag{3}$$

Obwohl die Gewinnwahrscheinlichkeit zweimal höher ist, wird man je Spiel 0.667 EURO verlieren.

Computerprogramm in ARIBAS

```
function wurf(n: integer): array;
var y            : array[4];
    A, p, i, j   : integer;
    g, v, gg, vv : integer;
begin
    g:=0; gg:=0; v:=0; vv:=0;
    for i:=1 to n do
        j:=0; A:=1;
        while A > 0 do
           inc(j,1);
           p:=random(6)+1;
           if (A=1) and (p=6) then
               g:=g+j;
               A:=0;
               inc(gg,1);
               continue;
           end;
           if (A=1) and (p=1) then A:=2; continue; end;
           if (A=2) and (p=6) then A:=1; continue; end;
           if (A=2) and (p=1) then
              v:=v+j;
              A:=0;
              inc(vv,1);
              continue;
           end;
        end;
    end;
    y[0]:= g/gg;
    y[1]:= g/n;
    y[2]:= v/vv;
    y[3]:= v/n;
    return y;
end;
```

Lösungsweg II über Markoff-Ketten

Stefan Kirchner, Humboldt Universität zu Berlin

Zunächst kann der Zustandsgraph in eine sogenannte Übergangsmatrix überführt werden:

- Zustand 1: kein Fluch
- Zustand 2: Fluch
- Zustand 3: verloren
- Zustand 4: gewonnen

Die Übergangsmatrix M beträgt dann:

$$M = \begin{bmatrix} 2/3 & 1/6 & 0 & 1/6 \\ 1/6 & 2/3 & 1/6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{4}$$

Dabei ist M_{ij} die Wahrscheinlichkeit vom Zustand i in den Zustand j zu wechseln. Aus der Theorie der *Markoff-Ketten* ist bekannt, daß der Eintrag in der i.ten Zeile und j.ten Spalte von M^n genau die Wahrscheinlichkeit ist, nach n Schritten im Zustand j zu landen, wenn man im Zustand i startet. *Mathematica* liefert für M^n folgende explizite Darstellung, die man z.B. durch Diagonalisierung der Matrix selber bekommen kann, was jedoch sehr mühsam ist.

$$M^n = \begin{bmatrix} \frac{1+(5/3)^n}{2^{1+n}} & \frac{-1+(5/3)^n}{2^{1+n}} & \frac{1+2^{1+n}-3\,(3/5)^n}{3\,2^{1+n}} & \frac{-1+2^{2+n}-3\cdot(3/5)^n}{3\cdot 2^{1+n}} \\ \frac{-1+(5/3)^n}{2^{1+n}} & \frac{1+(5/3)^n}{2^{1+n}} & \frac{-1+2^{2+n}-3\cdot(3/5)^n}{3\cdot 2^{1+n}} & \frac{1+2^{1+n}-3\cdot(3/5)^n}{3\cdot 2^{1+n}} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Interessant für unser Problem sind also die Einträge $M_{11}^n, M_{12}^n, M_{13}^n$ und M_{14}^n. Bildet man für M_{14}^n und M_{13}^n die Grenzwerte, so ergibt sich eine Gewinnwahrscheinlichkeit von

$$P[Gewinn] = \lim_{n\to\infty} M_{14}^n = \frac{2}{3} \tag{5}$$

bzw. eine Verlustwahrscheinlichkeit von

$$P[Verlust] = \lim_{n\to\infty} M_{13}^n = \frac{1}{3}. \tag{6}$$

M_{11}^n und M_{12}^n können verwendet werden, um die zu erwartete Schrittzahl im Falle eines Gewinnes bzw. eines Verlustes zu bestimmen.

Sei dazu $P(A_i)$ die Wahrscheinlichkeit, daß das Spiel nach genau i Schritten zu Ende ist und $P(B) = \frac{2}{3}$ die Gewinnwahrscheinlichkeit. Weiterhin gilt dann

$P(A_i \cap B) = M_{11}^{i-1} \cdot \frac{1}{6}$, da man in i Schritten genau dann gewinnt, wenn man nach $i-1$ Schritten im Zustand 1 sich befindet und anschließend eine sechs würfelt.

Der bedingte Erwartungswert $EW[g]$ für die erwartete Anzahl Schritte im Fall eines Gewinn beträgt demnach

$$
\begin{aligned}
EW[g] &= \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot P(A_i|B) && (7)\\
&= \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot P(A_i \cap B)/P(B) && (8)\\
&= \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot M_{11}^{i-1} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{\frac{2}{3}} && (9)\\
&= \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot \frac{1+(5/3)^{i-1}}{2^{1+i-1}} && (10)\\
&= \frac{1}{8} \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{i-1} + \left(\frac{5}{6}\right)^{i-1} \right] && (11)\\
&= \frac{1}{8} \left[\sum_{i=0}^{\infty} (i+1) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{i} + \sum_{i=0}^{\infty} (i+1) \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{i} \right] && (12)\\
&= \frac{1}{8} \left(\frac{1}{(1-\frac{1}{2})^2} + \frac{1}{(1-\frac{5}{6})^2} \right) && (13)\\
&= \frac{1}{8} (4+36) && (14)\\
&= 5 && (15)
\end{aligned}
$$

Bemerkung: Bei Gleichung (12) wird eine Variante der geometrischen Reihe angewandt. Sie kann durch Ableiten der geometrischen Reihe hergeleitet werden. Es gilt:

$$\sum_{i=0}^{\infty} (i+1)\, q^i = \frac{1}{(1-q)^2} \qquad \text{für} \quad 0 < q < 1 \qquad (16)$$

Analog gilt für die erwartete Schrittzahl in einem verlorenen Spiel

$$\begin{aligned}
EW[v] &= \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot P(A_i|\bar{B}) && (17)\\
&= \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot P(A_i \cap \bar{B})/P(\bar{B}) && (18)\\
&= \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot M_{12}^{i-1} \cdot \frac{1}{6}\frac{1}{\frac{1}{3}} && (19)\\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty} i \cdot \frac{-1+(5/3)^{i-1}}{2^{1+i-1}} && (20)\\
&= \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{\infty} i \cdot \left[\left(-\frac{1}{2}\right)^{i-1} + \left(\frac{5}{6}\right)^{i-1}\right] && (21)\\
&= \frac{1}{4}\left[\sum_{i=0}^{\infty}(i+1)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{i} + \sum_{i=0}^{\infty}(i+1)\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{i}\right] && (22)\\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{-1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} + \frac{1}{\left(1-\frac{5}{6}\right)^2}\right) && (23)\\
&= \frac{1}{4}(-4+36) && (24)\\
&= 8 && (25)
\end{aligned}$$

Lösungsweg III, Wahrscheinlichkeitsrechnung

Dr.Klaus Nagel, München

Für Gewinn oder Verlust kommt es nur auf die Einsen und Sechsen an. Man kann das Problem daher vereinfachen indem man den Würfel durch eine Münze ersetzt und bei Kopf(1) gewinnt und Zahl(0) verliert. Der erwartete Gewinn zwischen Würfel und Münze unterscheidet sich nur um den Faktor drei, das ist die erwartet Zahl der Würfe bis eine Eins oder Sechs fällt.
Ich betrachte also das äquivalente Münzspiel. Zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit p für den Gewinn betrachten wir drei Fälle des Folgenbeginns:

- Fall 1: 1 ...... In der Hälfte der Fälle: Gewinn
- Fall 2: 0 0 .... In einem Viertel der Fälle: Verlust
- Fall 3: 0 1 .... In einem Viertel der Fälle: Wieder in der Anfangslage.

Daraus erhält man für p die rekursive Bedingung:

$$p = \frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{4}\cdot 0 + \frac{1}{4}\cdot p \quad \rightarrow \quad p = \frac{2}{3} \qquad (26)$$

Im Fall 3 müssen daher 2/3 der Spiele gewonnen werden (Fall 3a) und 1/3 verloren (Fall 3b). Für den zu erwartenden Gewinn gilt:

- Fall 1 : $+3$ mit Wahrscheinlichkeit 1/2
- Fall 2 : -8 mit Wahrscheinlichkeit 1/4
- Fall 3a : $6+g$ mit Wahrscheinlichkeit 1/6
- Fall 3b : $-8+g$ mit Wahrscheinlichkeit 1/12

Daraus ergibt sich für g die rekursive Bedingung:

$$g = \frac{1}{2} \cdot 3 + \frac{1}{4} \cdot (-8) + \frac{1}{6} \cdot (6+g) + \frac{1}{12} \cdot (-8+g) \quad \rightarrow \quad g = -\frac{2}{9} \tag{27}$$

Daher ist beim Würfeln ein Verlust von 2/3 zu erwarten. Die zu erwartenden Spiellängen lassen sich genau so einfach berechnen, wieder nur aus der Tatsache, daß im Fall 3 nach zwei Münzwürfen wieder die Anfangssituation gegeben ist. Ich führe es für den Münzwurf durch:

1. Gewinnfall

Die bedingten Wahrscheinlichkeiten für die Gewinnfälle sind

- Fall 1: 3/4
- Fall 3a: 1/4

Daraus folgt für den Erwartungswert g der Länge:

$$g = \frac{3}{4} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot (2+g) \quad \rightarrow \quad g = \frac{5}{3} \tag{28}$$

2. Verlustfall

Die bedingten Wahrscheinlichkeiten für die Verlustfälle sind

- Fall 2: 3/4
- Fall 3b: 1/4

Daraus folgt für den Erwartungswert v der Länge:

$$v = \frac{3}{4} \cdot 2 + \frac{1}{4} \cdot (2+v) \quad \rightarrow \quad v = \frac{8}{3} \tag{29}$$

Für das Würfelspiel sind daher 5 (Gewinn) und 8 (Verlust) Würfe zu erwarten.