

Münzwechsel

aus dem Band Stochastik

Lambacher-Schweizer, Klett-Verlag



Abbildung 1: drei Münzen

Auf einem Tisch liegen drei Münzen, die alle Zahl zeigen (ZZZ). Jede Sekunde wird eine zufällige Münze gewendet, bis wieder alle Münzen mit der gleichen Seite oben liegen. Geschieht dies beim Muster WWW, gewinnen Sie, andernfalls (WWW) verlieren Sie.

1. Zeichnen Sie ein Prozessdiagramm zu dem Spiel und stellen Sie die Übergangsmatrix auf.
2. Bestimmen Sie die Gewinnwahrscheinlichkeit für das Muster WWW.
3. Berechnen Sie die mittlere Wartezeit bis das Spiel beendet ist WWW erscheint.
4. Das Spiel soll nur noch beim Muster WWW enden. Im Zustand ZZZ wird einfach weiter gespielt. Wie lange ist die mittlere Spieldauer nun?

Prozessdiagramm und Übergangsmatrix

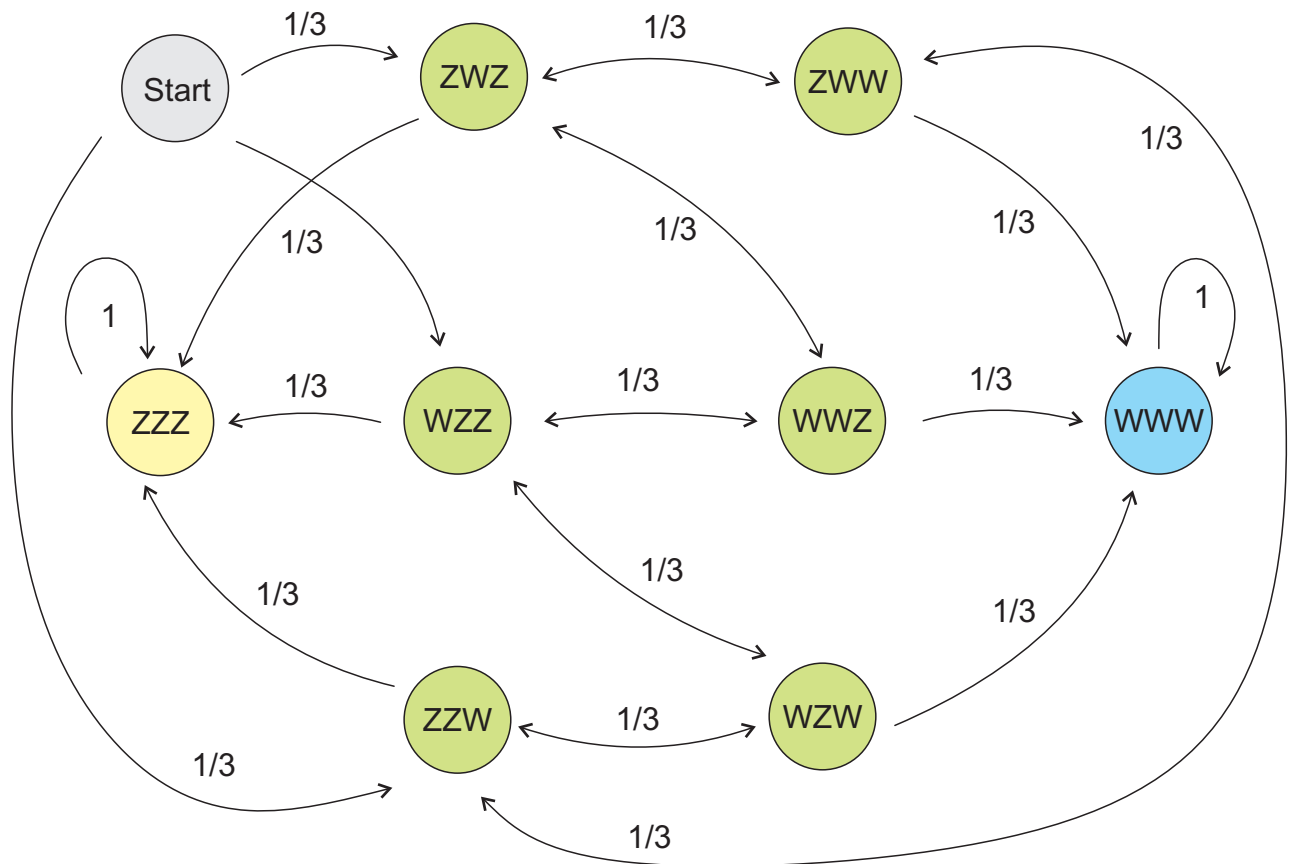


Abbildung 2: Prozessdiagramm zum Münzwechsel

Bei drei Münzen gibt es insgesamt $2^3 = 8$ Zustände bzw. Kombination aus Zahl und Wappen. Die Zustände ZZZ und WWW sind absorbierend. Desweiteren benötigen wir einen Zustand Start bei dem die Münzen das Muster ZZZ anzeigen. Ein Übergang kann immer nur von Start bzw. zwischen den Zuständen stattfinden, bei denen mindestens zwei Münzen die gleiche Seite zeigen. Da eine von drei Münzen zufällig gewählt wird, beträgt die Übergangswahrscheinlichkeit immer $1/3$. Aus dem Prozessdiagramm von Abb. 2 erhalten

wir die Übergangsmatrix:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 & 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

Berechnung mit dem CAS Mathematica

Die weitere Berechnung erfolgt im CAS Mathematica wie folgt:

```
M1 =
{{0 , 0 , 1/3 , 0 , 1/3 , 0 , 0 , 1/3 , 0 },
{0 , 1 , 0 , 0 , 0 , 0 , 0 , 0 , 0 },
{0 , 1/3 , 0 , 1/3 , 0 , 1/3 , 0 , 0 , 0 },
{0 , 0 , 1/3 , 0 , 0 , 0 , 1/3 , 1/3 , 0 },
{0 , 1/3 , 0 , 0 , 0 , 1/3 , 0 , 0 , 1/3 },
{0 , 0 , 1/3 , 0 , 1/3 , 0 , 1/3 , 0 , 0 },
{0 , 0 , 0 , 0 , 0 , 0 , 1 , 0 , 0 },
{0 , 1/3 , 0 , 1/3 , 0 , 0 , 0 , 0 , 1/3 },
{0 , 0 , 0 , 0 , 1/3 , 0 , 1/3 , 1/3 , 0 }};
proc1 = DiscreteMarkovProcess[{1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}, M1];
Graph[proc1]
MarkovProcessProperties[proc1]
first1 = FirstPassageTimeDistribution[proc1, 7];
Mean[first1] -> 23/5 = 4.6
PDF[proc1[[\Infinity]], 7] -> 2/5 = 0.4
first2 = FirstPassageTimeDistribution[proc1, 2];
Mean[first2] -> 18/5 = 3.6
PDF[proc1[[\Infinity]], 2] -> 3/5 = 0.6
```

Die Gewinnwahrscheinlichkeit für WWW beträgt 40 %. Die mittlere Spieldauer bis dorthin beträgt $t = 4.6$ s

Prozessdiagramm mit dem Endzustand WWW

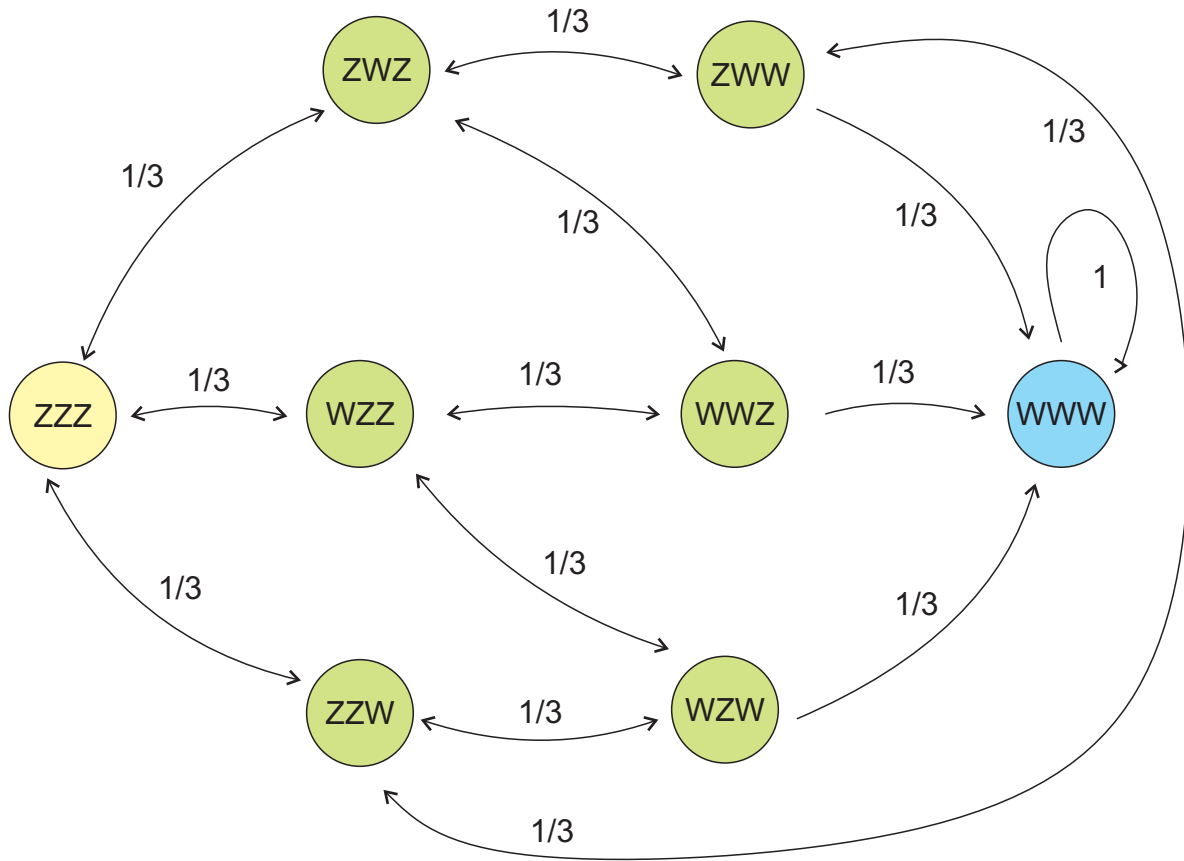


Abbildung 3: Prozessdiagramm mit Endzustand bei WWW

Der Zustand Start entfällt, da ZZZ nicht mehr absorbierend ist. Es können jetzt Übergänge zu ZZZ hin als auch Übergänge von ZZZ aus weg erfolgen. Die Übergangsmatrix ändert sich wie folgt:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 & 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

Die weitere Berechnung erfolgt im CAS Mathematica wie folgt:

```
M1 =
{{ 0 , 1/3 , 0 , 1/3, 0 , 0 , 0 , 1/3 },
 { 1/3 , 0 , 1/3 , 0 , 1/3 , 0 , 0 , 0 },
 { 0 , 1/3 , 0 , 0 , 0 , 1/3 , 1/3 , 0 },
 { 1/3 , 0 , 0 , 0 , 1/3 , 0 , 0 , 1/3 },
 { 0 , 1/3 , 0 , 1/3 , 0 , 1/3 , 0 , 0 },
 { 0 , 0 , 0 , 0 , 0 , 1 , 0 , 0 },
 { 1/3 , 0 , 1/3 , 0 , 0 , 0 , 0 , 1/3 },
 { 0 , 0 , 0 , 1/3 , 0 , 1/3 , 1/3 , 0 }};
proc1 = DiscreteMarkovProcess[{1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}, M1];
Graph[proc1]
MarkovProcessProperties[proc1]
first1 = FirstPassageTimeDistribution[proc1, 6];
Mean[first1] -> 60/7 = 8.57143
```

Die mittlere Spieldauer verlängert sich auf 8.6 Sekunden.