Seitenhalbierende im Dreieck

Ingmar Rubin, Berlin

24. November 2003

Gegeben sei das Dreieck ABC mit der Grundseite $\overline{AB}$ und dem Winkel $\gamma = \sphericalangle BCA$. Die Seitenhalbierende $\overline{CD} = r$ bildet mit der Grundseite den Winkel t. Gesucht ist die Ortskurve vom Punkt C wenn t das Intervall $0 \leq t \leq \pi$ durchläuft und

1. der Winkel γ konstant $30°$ beträgt,
2. der Winkel γ eine lineare Funktion von t ist, mit $\gamma(t) = \gamma_0 + k\,t, \quad \gamma_0 = 30°,\ k = 0.3$

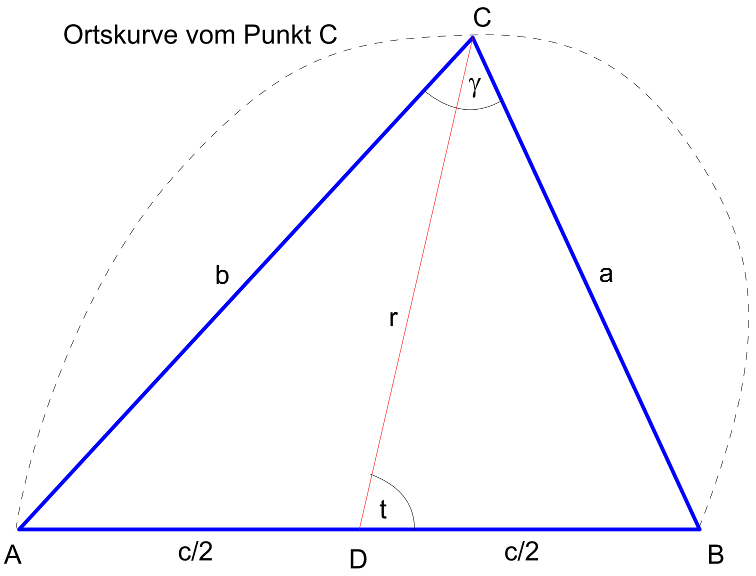

Abbildung 1: Skizze zur Aufgabenstellung

- Ermittle für beide Fälle die Funktion $r = r(t)$,
- Zeichne die Ortskurven in je ein Diagramm für das Intervall $0 \leq t \leq \pi$,
- Berechne den Winkel t_{max} aus dem Intervall $0 \leq t \leq \pi$ bei dem $r(t)$ im Fall 2 maximal wird !

Punktezahl = 7

Lösung

Aus der Kreisgeometrie sind die beiden folgenden Sätze bekannt:

- *Alle Periheriewinkel über einer Sehne im Kreis sind konstant.*
- *Der Zentriewinkel über einer Sehne ist doppelt so groß wie der zugehörige Periepheriwinkel.*

Damit muß im Fall 1 die Ortskurve Teil des Umkreises vom Dreick $\triangle ABC$ sein (Bild 2).

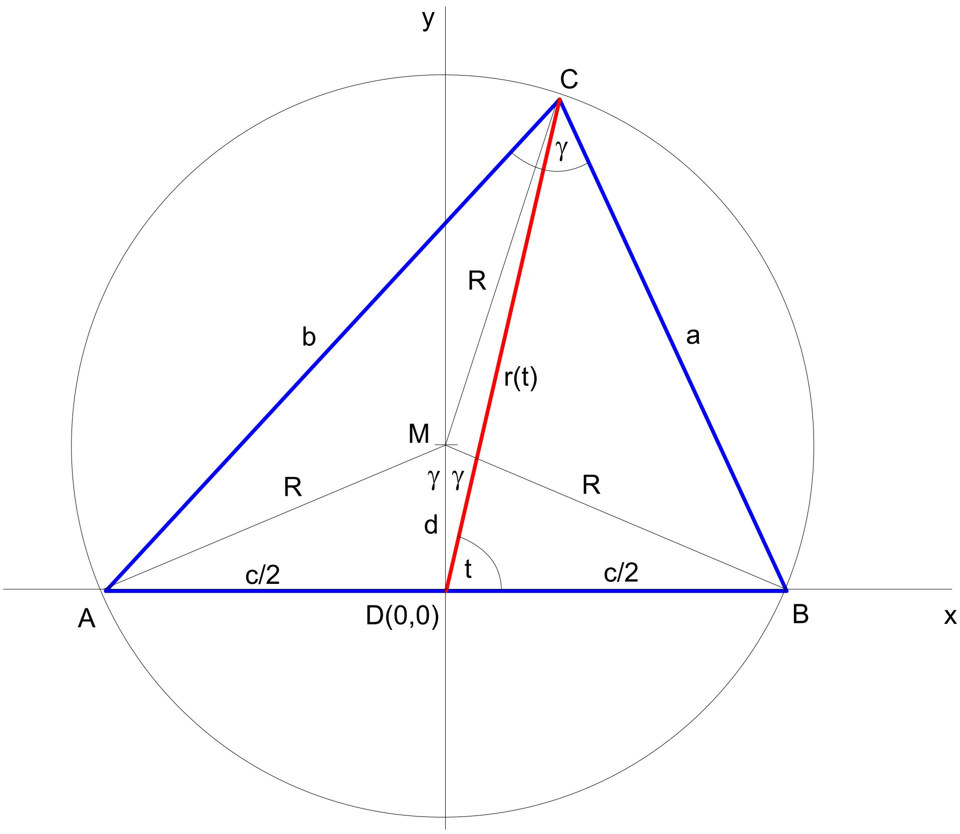

Abbildung 2: Skizze zur Lösung

Als Koordinatenursprung wählen wir den Punkt $D(0,0)$. Den Umkreismittelpunkt vom Dreieck ABC bezeichen wir mit M. Der Umkreisradius R und die Strecke $d = \overline{DM}$ folgen aus dem rechtwinkliegen Dreieck DMB:

$$\triangle DMB: \qquad R = \frac{c}{2\sin\gamma}, \qquad d = R\,\cos\gamma = \frac{c\,\cos\gamma}{2\sin\gamma} \tag{1}$$

Der Cosinusatz im schiefwinkliegen Dreieck DMC lautet:

$$\triangle DMC: \qquad R^2 = d^2 + r^2 - 2\,d\,r\,\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) \tag{2}$$

Die Größen R und d werden aus (1) ersetzt :

$$\frac{1}{4}\,c^2\mathrm{csc}[\gamma]^2 = r^2 + \frac{1}{4}\,c^2\cot[\gamma]^2 - c\,r\,\cot[\gamma]\sin[t] \tag{3}$$

Die quadratische Gleichung (3) lösen wir nach r auf :

$$r_1(t) = \frac{c}{2}\left(\cot[\gamma]\sin[t] - \sqrt{-\cot[\gamma]^2 + \mathrm{csc}[\gamma]^2 + \cot[\gamma]^2\sin[t]^2}\right) \tag{4}$$

$$r_2(t) = \frac{c}{2}\left(\cot[\gamma]\sin[t] + \sqrt{-\cot[\gamma]^2 + \mathrm{csc}[\gamma]^2 + \cot[\gamma]^2\sin[t]^2}\right) \tag{5}$$

Wir benötigen den Lösungsanteil, für den $y(t) = r(t)\sin(t)$ positive Werte liefert. Die Funktion $r_2(t)$ erfüllt diese Bedingung für das Intervall $0 \le t \le \pi$. Mit dem Kommando `r=FullSimplify[r2]` können wir denn Funktionsausdruck noch etwas vereinfachen. Das Bild der Ortskurve wird auch als *Faßkurve* bezeichnet.

$$r(t) = \frac{c}{2}\left(\sqrt{-\cos[t]^2\cot[\gamma]^2 + \mathrm{csc}[\gamma]^2} + \cot[\gamma]\sin[t]\right) \tag{6}$$

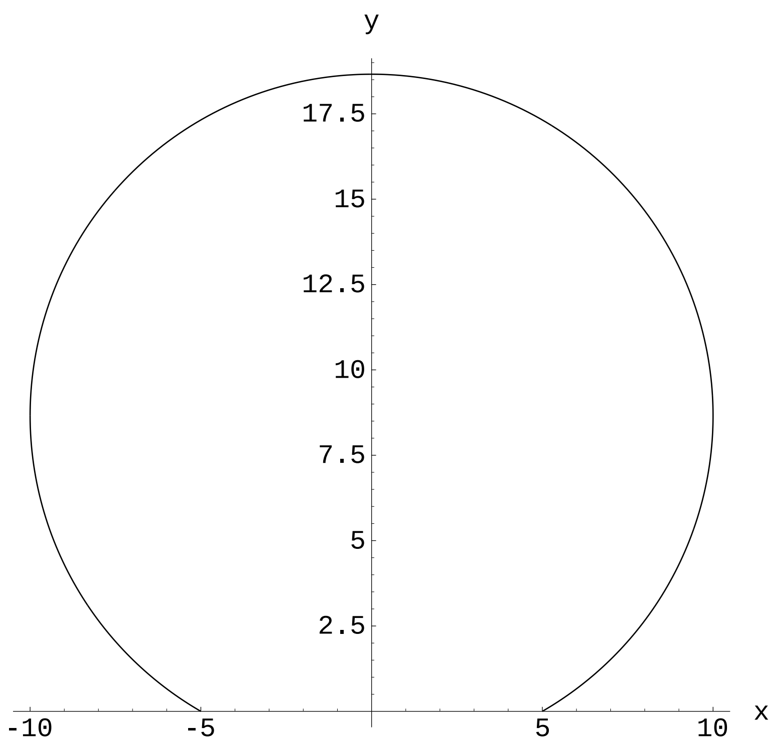

Abbildung 3: Ortskurve mit konstanten Winkel $\gamma = 30°$ - *Faßkurve*

Der Lösungsansatz ist von einem beliebigen Winkel γ ausgegangen. Bild 2 ist offensichtlich für alle Winkel γ aus dem Intervall $0 \leq \gamma \leq \pi$ gültig. Demzufolge können wir an Stelle von γ auch die lineare Funktionsgleichung (7) setzen.

$$\gamma(t) = \gamma_0 + k\,t \tag{7}$$

$$r(t) = \frac{1}{2}\,c\,\left(\sqrt{-\cos[t]^2 \cot[\gamma_0 + k\,t]^2 + \csc[\gamma_0 + k\,t]^2} + \cot[\gamma_0 + k\,t]\sin[t]\right) \tag{8}$$

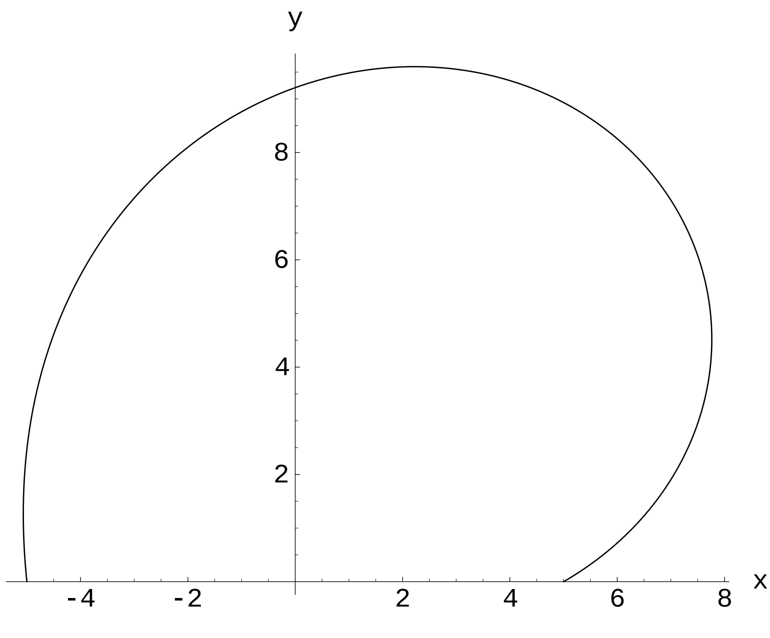

Abbildung 4: Ortskurve mit veränderlichen Winkel $\gamma = \gamma_0 + k\,t$

Maximumbestimmumg von $r(t)$

Wir bilden nun die erste Ableitung der Funktion $r(t)$ aus Gleichung (8):

$$r'(t) = c\left(\sqrt{-\cos[t]^2\cot[kt+\gamma_0]^2 + \csc[kt+\gamma_0]^2} + \cot[kt+\gamma_0]\sin[t]\right)$$
$$(\cos[t]\cot[kt+\gamma_0] - k\csc[kt+\gamma_0]^2\sin[t])\Big/$$
$$2\sqrt{-\cos[t]^2\cot[kt+\gamma_0]^2 + \csc[kt+\gamma_0]^2}$$

Die Nullstellen dieser komplizierten, transzendenten Funktion muß numerisch bestimmt werden. Zunächst setzen wir die Werte aus der Aufgabenstellung ein $c = 10$, $\gamma_0 = \frac{\pi}{6}$, $k = 0.3$:

$$r'(t) = 5\left(\sqrt{-\cos[t]^2\cot\left[\frac{\pi}{6}+0.3t\right]^2 + \csc\left[\frac{\pi}{6}+0.3t\right]^2} + \cot\left[\frac{\pi}{6}+0.3t\right]\sin[t]\right.$$
$$\left.\left(\cos[t]\cot\left[\frac{\pi}{6}+0.3t\right] - 0.3\csc\left[\frac{\pi}{6}+0.3t\right]^2\sin[t]\right)\right)\Big/$$
$$\left(\sqrt{-\cos[t]^2\cot\left[\frac{\pi}{6}+0.3t\right]^2 + \csc\left[\frac{\pi}{6}+0.3t\right]^2}\right)$$

Über eine Funktionsgraphik wird der Startwert für die iterative Nullstellensuche bestimmt ($t_s = 1.0$). Die numerische Maximumbestimmung liefert:

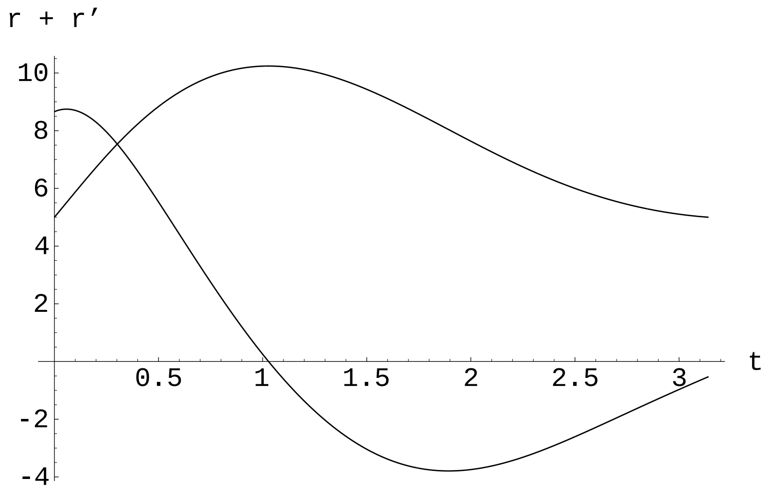

Abbildung 5: Funktion $r(t)$ und ihre erste Ableitung $r'(t)$ im Intervall $0 \leq t \leq \pi$

$$t_{max} = 1.028444828022685 \approx 58.9255^\circ, \quad \rightarrow \quad r(t_{max}) = 10.2408 \tag{9}$$

Auf den Nachweis mit Hilfe der zweiten Ableitung sei an dieser Stelle verzichtet.