# Konstruktion der Muschellinie

Albrecht Dürer

1471-1528


Abbildung 1: A. Dürer, *Die Melancholie* (Melencolia I), 1514, Kupferstich

## Dürer und Mathematik

Zu den bedeutendsten Mathematikern der Renaissance zählen Leonardo da Vinci und Albrecht Dürer. Der Öffentlichkeit sind beide jedoch vorrangig als Künstler bekannt. Am interessantesten aus mathematischer wie auch aus kunsttheoretischer Sicht ist sicher der Kupferstich *Melancholie*. Das Werk strotzt vor mathematischen Bezügen. Neben der Abbildung eines magischen Quadrates, Instrumenten zur Konstruktion und der perspektivischen Darstellung kann man in die gedankenversunkene Engelsgestalt durchaus das resignierende Nachsinnen über schwierige mathematische Probleme hineininterpretieren.

## Konstruktion der Muschellinie

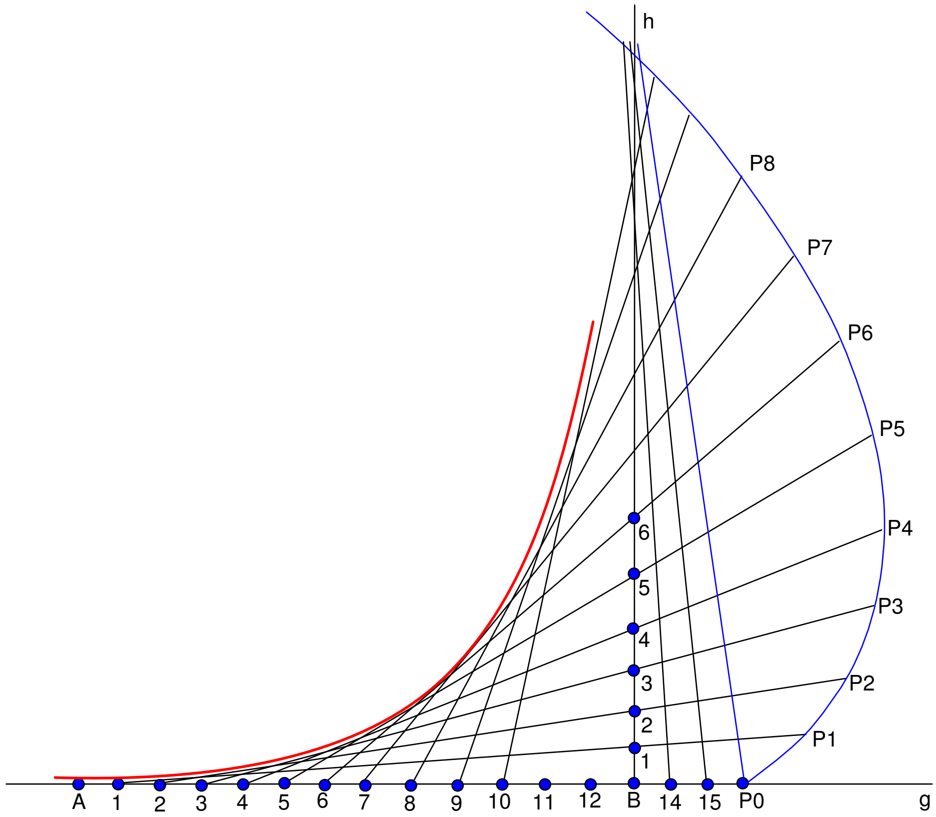


Abbildung 2: Konstruktion der Muschellinie

In Dürers grundlegenden Werk *Unterweysung der Messung mit dem Zirckel und Richtscheyt in Linien, Ebnen und gantzen Corporen...* finden wir eine Konstruktionszeichnung dieser Kurve. Bei der Nachstellung der folgenden Konstruktion empfhielt sich die Benutzung von Millimeterpapier oder zumindest karierten Papier - auch wenn es das zu Dürers Zeiten noch nicht gab. Der Konstruktionstext zu Abbildung 2 lautet:

```
- zeichne eine waagerechte Gerade g
- markiere auf g zwei Punkte A, B im Abstand von AB = 13cm
- errichte in B die Senkrechte zu g und bezeichne sie mit h
- skaliere die Gerade g von A beginnend in Abstaenden zu 1 cm,
  bezeichne die Skalenstriche mit 1,2,3 usw.
- skaliere die Gerade h von B beginnend in Abstaenden zu 1 cm,
  bezeichne die Skalenstriche mit 1,2,3 usw.
- zeichne Hilfsgreaden von g beginnend ueber h hinaus
  in dem 1 auf g mit 1 auf h, 2 auf g mit 2 auf h
  usw. verbunden werden
- trage mit dem Zirkel von g aus, auf den Hilfsgeraden
  den festen Abstand r=16cm ab
```

```
- bezeichne die Endpunkte auf den Hilfsgeraden
  mit P1, P2, P3 ... P16
- trage von A aus die Strecke r=16cm auf g ab und
  bezeichne den Punkt mit P0
- verbinde die Punkte P0 ... P16 zur gedachten Muschellinie
```

## Aufgabenstellung

1. Leite aus der Konstruktionszeichnung eine Gleichung der Kurve ab.
2. Konstruiere die Muschellinie mit einem Programm der dynamischen Geometrie (EUKLID, ZUL, GEONET usw.). Variiere den Parameter $a$. Beschreibe was sich verändert.
3. Für $a = 13$ und $r = 16$ ergibt sich eine Überschneidung der Kurve (Schleife). Ermittle den Flächeninhalt der Schleife.
4. Bestimme die einhüllende Kurve der Geradenschar (siehe rote Kurve in Abbildung 2)

### Parameterdarstellung der Kurve

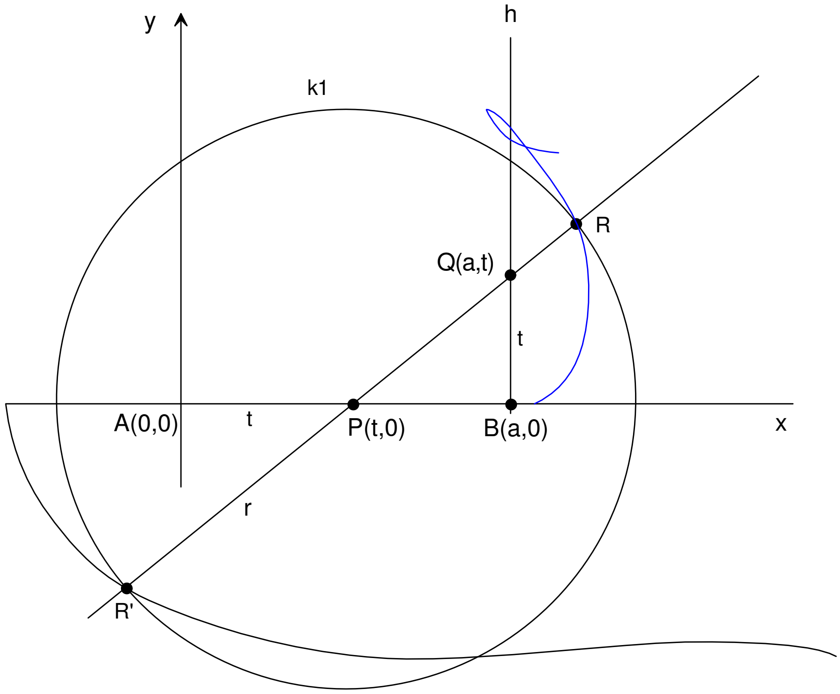


Abbildung 3: Geradengleichung durch $P$ und $Q$

Wir denken uns Punkt $A$ im Ursprung eines rechtwinklig, kartesischen Koordinatensystems. Bezeichne $a = \overline{AB}$ die Distanz zum Punkt $B$. Sei $t$ ein freier Parameter mit $0 \leq t \leq \infty, t \in R$. Sei $P(t, 0)$ ein beweglicher Punkt auf der $x - Achse$ und $Q(a, t)$ ein laufender Punkt auf der Geraden $h$. Für $t = 0$ gilt dann $P = A$ und $Q = B$. Aus der *Zweipunktegleichung* ermitteln wir die Geradengleichung durch $P, Q$:

$$\overline{PQ}: \qquad \frac{y-0}{t-0} = \frac{x-t}{a-t} \quad \rightarrow \quad y = \frac{t\,(x-t)}{a-t} \tag{1}$$

Diese Gleichung beschreibt bei veränderlichen Parameter $t$ die in Abbildung 1 konstruierte Geradenschar. Wir denken uns nun einen Kreis $k_1$ mit Mittelpunkt in $P(t, 0)$ und festen Radius $r$. Die Kreisgleichnug für $k_1$ lautet dann:

$$k_1: \qquad (x-t)^2 + y^2 = r^2 \tag{2}$$

Die Schnittmenge aus Geradenschar (1) und den Kreisen (2) ist die gesuchte Lösungskurve. Die Auflösung mittels Computeralgebrasystem ergibt zwei Kurvenäste:

$$x(t) = t + \frac{r\,(a-t)}{\sqrt{a^2 - 2\,a\,t + 2\,t^2}}, \quad y(t) = \frac{r\,t}{\sqrt{a^2 - 2\,a\,t + 2\,t^2}} \tag{3}$$

$$x(t) = t - \frac{r\,(a+t)}{\sqrt{a^2 - 2\,a\,t + 2\,t^2}}, \quad y(t) = -\frac{r\,t}{\sqrt{a^2 - 2\,a\,t + 2\,t^2}} \tag{4}$$

Der zweite Kurvenast folgt aus dem unteren Schnittpunkt $R'$ zwischen der Geraden durch $PQ$ und dem Kreis $k_1$. Dieser Zweig wurde von *Dürer* nicht endeckt.

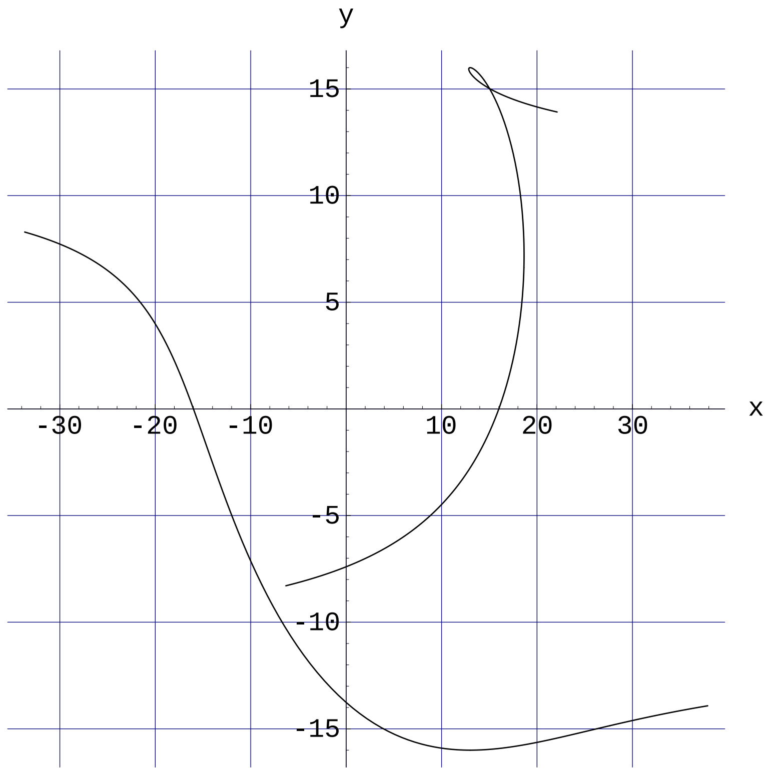


Abbildung 4: Parameterplot für $-10 \leq t \leq 30$

## Konstruktion in EUKLID

Wir benutzen das Programm EUKLID das im Internet unter *www.dynageo.de* zu finden ist. Der Konstruktionstext in EUKLID lautet:

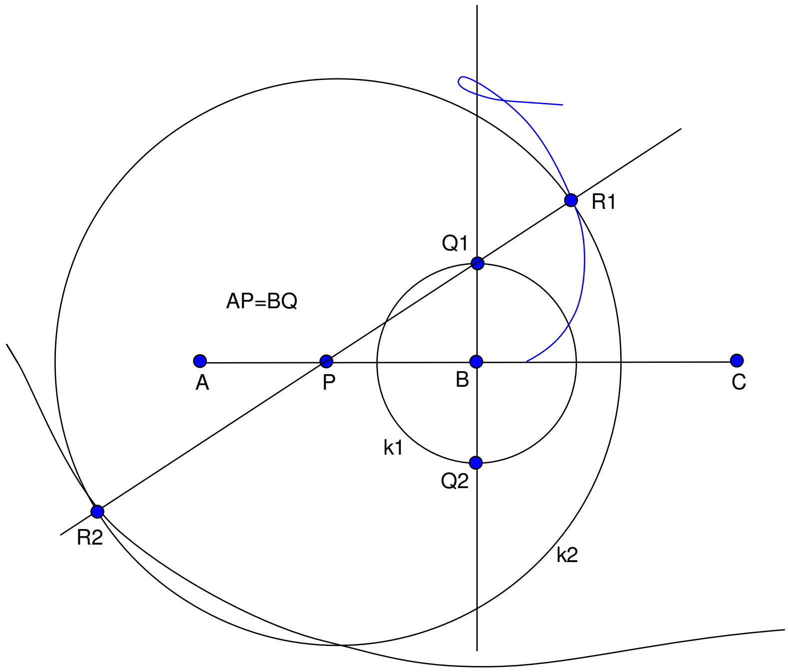


Abbildung 5: Konstruktion der Muschellinie in EUKLID

```
A  ist ein freier Basispunkt
C  ist ein freier Basispunkt
s1  ist die Strecke  [ A ; C ]
B  ist ein Basispunkt, der an s1 gebunden ist.
g1  ist das Lot von B auf  s1
P  ist ein Basispunkt, der an s1 gebunden ist.
k1  ist ein Kreis mit Mittelpunkt B und Radius d(A;P) cm
Q1  ist ein Schnittpunkt der Linie g1 mit dem Kreis k1
Q2  ist der 2. Schnittpunkt der Linie g1 mit dem Kreis k1
g2  ist die Gerade  ( P ; Q1 )
k2  ist ein Kreis mit Mittelpunkt P und Radius 6 cm
R1  ist ein Schnittpunkt der Linie g2 mit dem Kreis k2
R2  ist der 2. Schnittpunkt der Linie g2 mit dem Kreis k2
OL1  ist eine Ortslinie des Punktes R1, wenn P gezogen wird
OL2  ist eine Ortslinie des Punktes R2, wenn P gezogen wird
```

Wenn der Punkt $B$ auf der Geraden $AC$ bewegt wird ändert sich der Parameter $a$. Bewegen wir $B$ nach rechts wird die Schleife im oberen Kurvenast zunehmend kleiner und verschwindet schließlich bei $a = r$. Umgekehrt vergrößert sich die Schleife und bricht schließlich bei $a = 0$ in eine Gerade auf.

### Flächeninhalt der Schleife

Im ersten Schritt bestimmen wir die zum Knotenpunkt gehörenden Parameter $t_1$ und $t_2$. Es läßt sich zeigen, dass der Knotenpunkt auf der Geraden $y = x$ liegt. Wir lösen die Gleichung $x(t) = y(t)$ nach $t$ auf:

$$t_1 = \frac{1}{4}\left(a + \sqrt{a^2 + 8\,r^2} - \sqrt{8\,r^2 - 2\,a\left(a + \sqrt{a^2 + 8\,r^2}\right)}\right) \tag{5}$$

$$t_2 = \frac{1}{4}\left(a + \sqrt{a^2 + 8\,r^2} + \sqrt{8\,r^2 - 2\,a\left(a + \sqrt{a^2 + 8\,r^2}\right)}\right) \tag{6}$$

Der Flächeninhalt wird für Kurven in Parameterform aus der *Leibnizschen Sektorenformel* errechnet:

$$A = \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} (x \cdot \dot{y} - \dot{x} \cdot y)\, dt \tag{7}$$

$$\dot{x} = 1 - \frac{a\,r\,t}{(a^2 - 2\,a\,t + 2\,t^2)^{3/2}} \tag{8}$$

$$\dot{y} = \frac{a\,r\,(a-t)}{(a^2 - 2\,a\,t + 2\,t^2)^{3/2}} \tag{9}$$

$$A = \int_{t_1}^{t_2} \frac{r\left(-2\,t^3 + a\left(t^2 + r\sqrt{a^2 - 2\,a\,t + 2\,t^2}\right)\right)}{2\,(a^2 - 2\,a\,t + 2\,t^2)^{3/2}}\, dt \tag{10}$$

$$A = \frac{r}{2}\left[-\frac{(a-t)^2}{\sqrt{a^2 - 2\,a\,t + 2\,t^2}} - r\ \arctan\left[1 - \frac{2\,t}{a}\right] - \frac{a\ \log\left[-a + 2\,t + \sqrt{2}\sqrt{a^2 - 2\,a\,t + 2\,t^2}\right]}{\sqrt{2}}\right]_{t_1}^{t_2} \tag{11}$$

Eine algebraische Bestimmung des Flächeninhaltes scheitert aufgrund der transzendenten Funktionen. Die numerischen Näherungswerte betragen :

$$t_1 \approx 9.5111, \quad t_2 \approx 20.5314, \quad A \approx 0.598157 \tag{12}$$

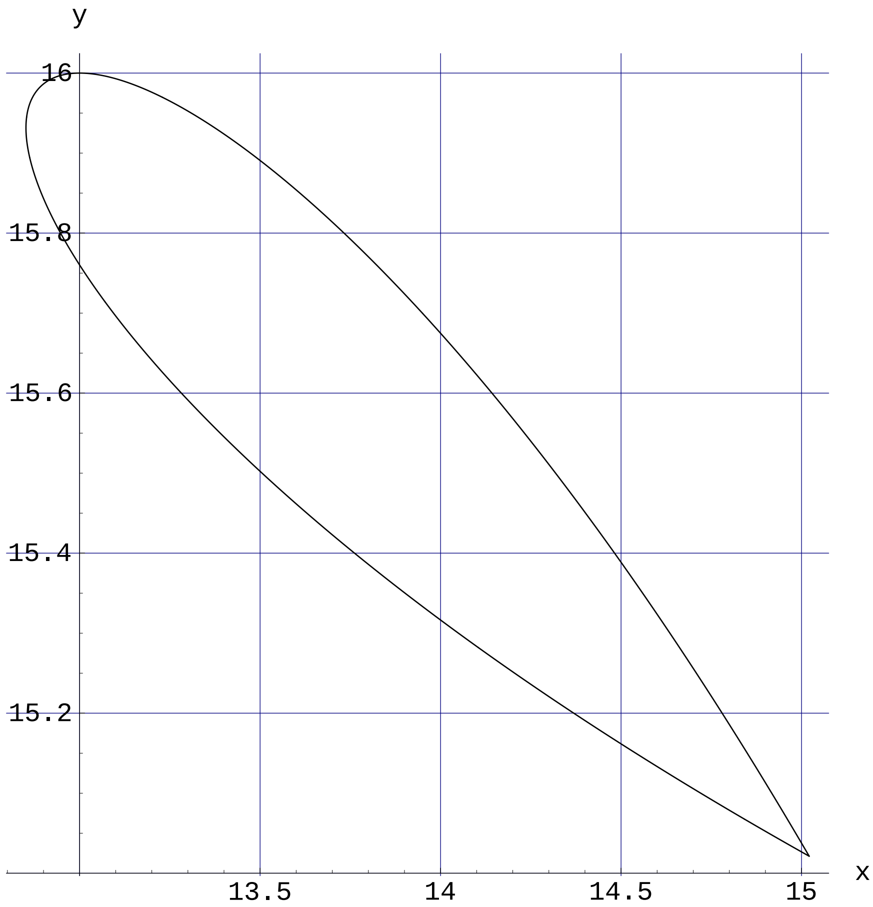


Abbildung 6: Parameterplot der Schleife für $t_1 \leq t \leq t_2$

## Gleichung der Einhüllenden

Die Geradenschar wird durch die implizite Funktionsgleichung $F$ beschrieben:

$$y = \frac{t\,(x-t)}{a-t} \quad \rightarrow \quad F = y\,(a-t) - t\,(x-t) \tag{13}$$

Aus $F$ können wir die Gleichung der einhüllenden Kurve bestimmen, indem wir aus dem Gleichungssystem (7) den Parameter $t$ eleminieren :

$$F = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial t} = 0 \tag{14}$$

$$\frac{\partial[y\,(a-t) - t\,(x-t)]}{\partial t} = 2,t - x - y = 0 \quad \rightarrow \quad t = \frac{x+y}{2} \tag{15}$$

Das Ergebnis aus (7) setzen wir in (5) ein :

$$t = \frac{x+y}{2} \quad \rightarrow \quad y\,(a-t) - t\,(x-t) = 0 \quad \rightarrow \quad 4\,a\,y = (x+y)^2 \tag{16}$$

Bei (8) handelt es sich um eine Kegelschnittgleichung (Parabel). Man kann eine Auflösung nach $y$ vornehmen. Der untere Ast der Kurve lautet dann:

$$y = 2\,a - x - 2\,\sqrt{a^2 - a\,x} \tag{17}$$

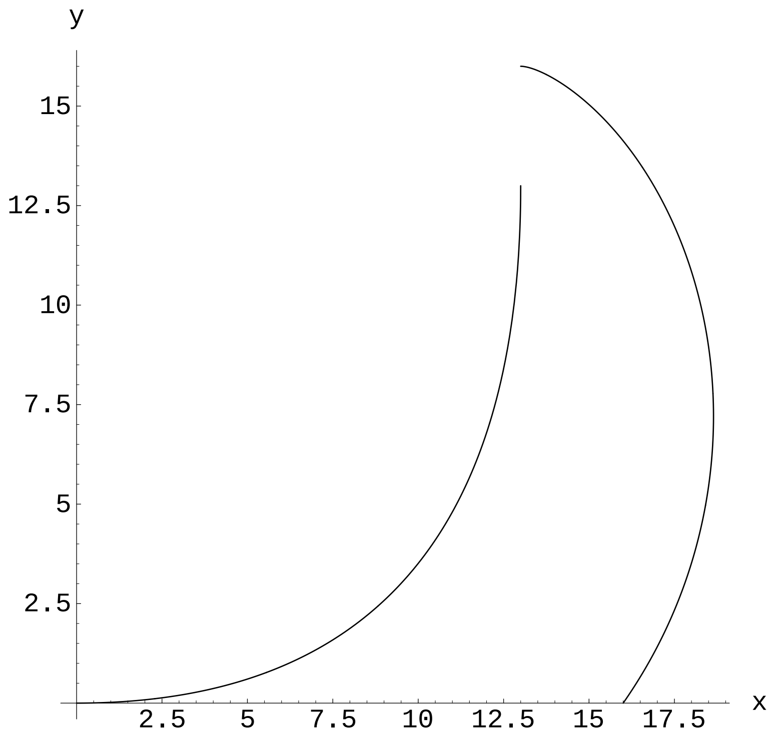


Abbildung 7: Einhüllende und Muschellinie für $0 \leq t \leq 13$