Dynamische Geometrie mit dem Programm EUKLID

Ein Beitrag von Ingmar Rubin

24. April 2001

Zusammenfassung

Im Zeitalter von PC und INTERNET entstehen völlig neue Methoden,um mathematische Aufgabenstellungen zu bearbeiten. Während für die klassische Geometrie Zirkel und Lineal als Handwerkszeug benutzt wurden, können heute mit Hilfe von PC-Programmen Konstruktionen beliebig verändert werden.

Besonders interessant ist das Gebiet der *Dynamischen Geometrie* . Eine Reihe von Programmen wurde speziell für den Schulunterricht entwickelt. Sie können als Shareware bzw. Freeware über das Internet bezogen werden :

- *Cinderella*, Klett-Schulbuchverlag, Shareware 99.- DM, `http://www.klett-verlag.de/heureka/lernsoftware/index.html`
- *EUKLID*, R.Mechling, Shareware 50.-DM, http://www.mechling.de
- *Geonet*, W.Neidhardt, kostenfrei, http://did.mat.uni-bayreuth.de/geonet/
- *Zirkel und Lineal*, R.Grothmann, kostenfrei, http://mathsrv.ku-eichstaett.de/MGF/homes/grothmann/zul.html

Ein Sammlung interessanter Links zur *Dynamischen Geometrie* findet man bei:

- Mathe-Werkstatt von H.J. Elschenbroich : `http://www.mathe-werkstatt.de`
- Geometriepage von Monika Schwarze : `http://www.mathematikunterricht.de/`

Die folgende Aufgabenstellung wird auf zwei verschiedenen Wegen gelöst. Der erste Lösungsweg beschreibt eine Konstruktion mit dem Programm EUKLID und zeigt, das auch ohne Kenntnisse der analytischen Geometrie eine Lösung möglich ist. Der zweite Lösungsweg ist Schülern der Sekundarstufe II zu empfehlen.

Aufgabenstellung

Gegeben ist ein Kurbelgelenkmechanismus wie im Bild 1 dargestellt. Auf der Peripherie einer Kreisscheibe befindet sich im Punkt $A(x_k, y_k)$ ein Gelenkzapfen. Der Radius der Kreisscheibe beträgt $r = 2\,cm$. In dem Gelenk A ist eine Kurbelstange drehbar befestigt. Die Kurbelstange durchläuft ein Gleitlager im Punkt B. Der Punkt B befindet sich im festen Abstand $a = 3\,cm$ vom Mittelpunkt der Kreisscheibe entfernt. Wir betrachten den Punkt $P(u, v)$, der $L = 6\,cm$ von A entfernt auf der Kurbelstange liegt.

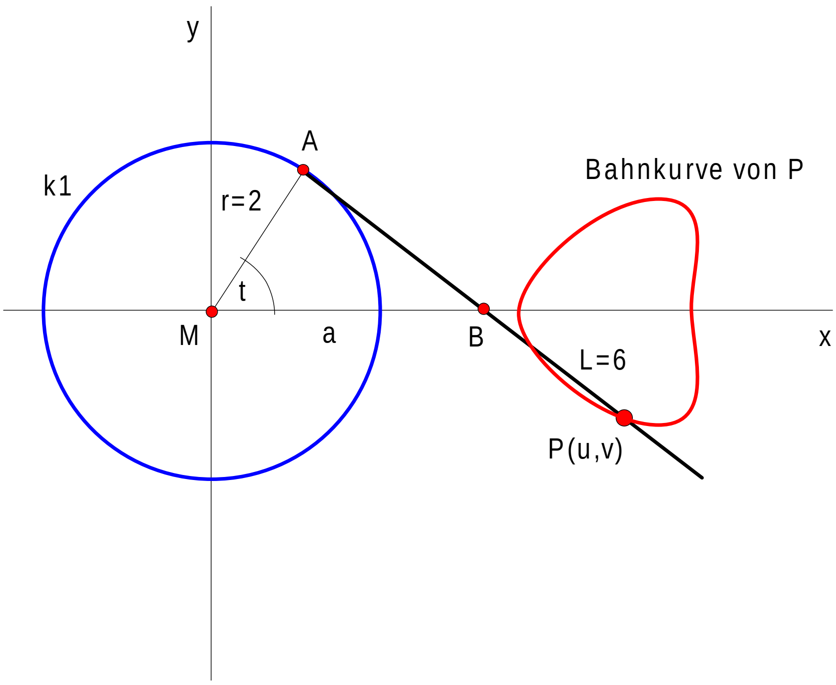

Abbildung 1: Skizze zur Aufgabenstellung

1. Konstruiere mit Hilfe von EUKLID den Gelenkmechanismus ! Welche Bahnkurve beschreibt der Punkt $P(u, v)$ auf der Kurbelstange, wenn der Drehwinkel t das Intervall $0 \leq t \leq 2 \cdot \pi$ durchläuft ? An Stelle von EUKLID kann auch das Programm *Z.u.L. - mit Zirkel und Lineal* benutzt werden.

2. Aus der geometrischen Konstruktion sind die Beschreibungsgleichungen für die Koordinaten des Punktes P zu ermitteln. Gesucht ist eine Parameterdarstellung der Form $u = u(t)$ und $v = v(t)$. Für das Intervall $0 \leq t \leq 2 \cdot \pi$ ist die Bahnkurve von P zu zeichnen (PC Programme MuPAD, MAPLE V, DERIVE , GNUplot o.ä.).

3. Gesucht ist der von der Kurve eingeschlossene Flächeninhalt A. Die numerische Integration erfolgt mit einem PC Programm.

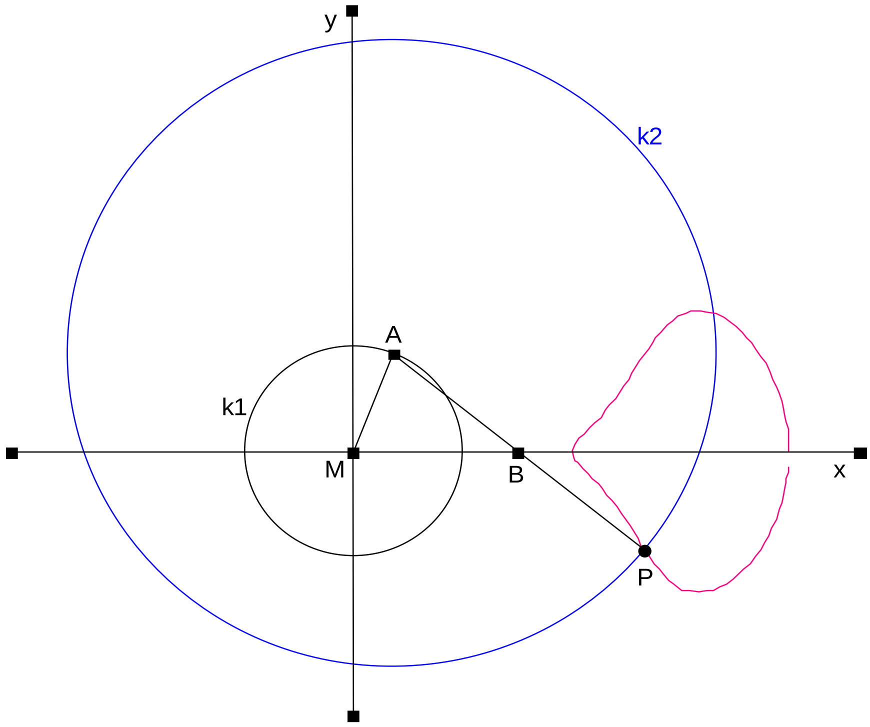

Abbildung 2: Ortskurve vom Punkt P im Programm EUKLID

Konstruktionsschritte im Programm EUKLID

```
- gehe in das Menue Konstruieren,
- konstruiere einen Kreis mit dem festen Radius r = 2 cm um den
  Punkt M (Koordinatenursprung),
- benenne den Kreis mit k1 (Doppelklick auf den Kreis),
- lege einen Punkt A auf dem Kreis k1 fest (Hauptmenue Punkt an Linie binden !),
- lege den Punkt B auf der x-Achse im Abstand von 3 cm zum Punkt M fest,
- konstruiere einen Kreis mit dem festen Radius r=6 cm um den Punkt A,
- benenne diesen Kreis mit k2,
- konstruiere eine Gerade g1 durch die Punkte A und B,
- bringe die Gerade g1 mit dem Kreis k2 zum Schnitt,
- benenne den unteren der beiden Schnittpunkte mit P,
- gehe in das Menue Hauptleiste,
- waehle den Punkt Ortslinie aufzeichnen,
- klicke mit der Maus dann auf Punkt P,
- ziehe den Punkt A einmal entlang der Kreisperipherie von k1, so dass A
  eine vollstaendige Umdrehung um M vollzieht .
```

Lösung in analytischer Geometrie

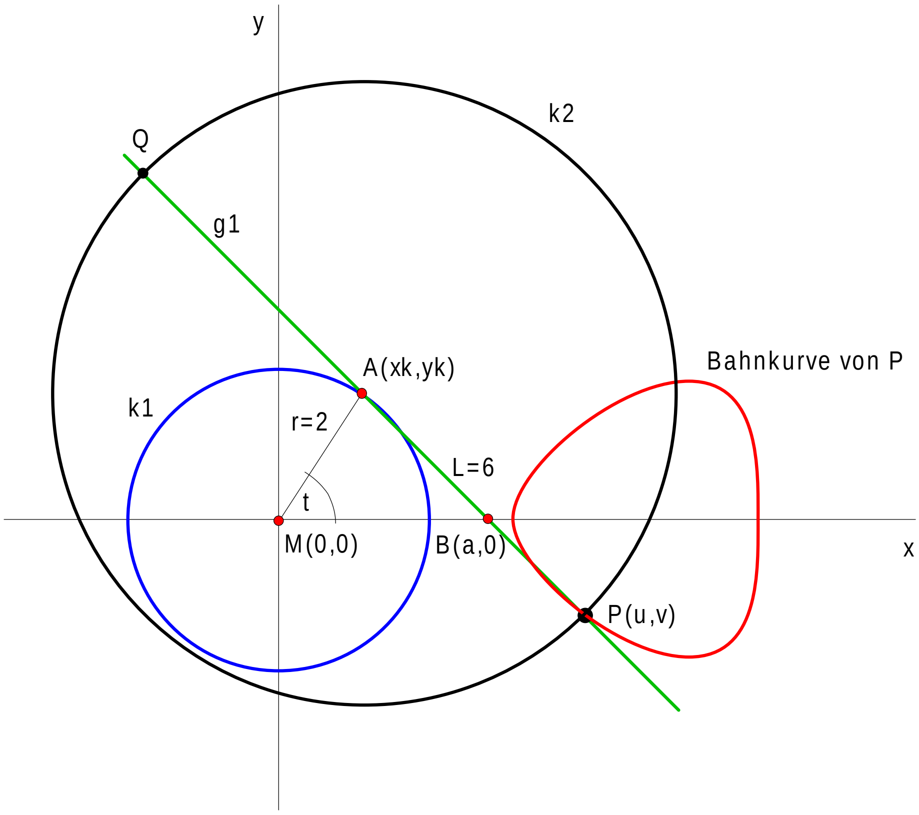

Abbildung 3: Berechnung von P als Schnitt zwischen Gerade g_1 und Kreis k_2

Wir legen den Koordinatenursprung in das Drehzentrum M der Kreissscheibe. Die Koordinaten vom Punkt A errechnen sich aus der Parameterdarstellung von k_1:

$$x_k(t) = r \cdot \cos t\,, \qquad y_k(t) = r \cdot \sin t \tag{1}$$

Die Kurbelstange (Gerade g_1) läuft durch die Punkte $A(x_k, y_k)$ und $B(a, 0)$. Mit Hilfe der Zweipunktegleichung erhälten wir :

$$g_1 : \qquad \frac{y - y_k}{y_b - y_k} = \frac{x - x_k}{x_b - x_k} \tag{2}$$

Nun zeichnen wir um den Punkt A den Kreis k_2 mit dem Radius $L = 6$. Seine Gleichung lautet:

$$k_2 : \qquad (x - x_k)^2 + (y - y_k)^2 = L^2 \tag{3}$$

Mit Hilfe eines Computeralgebraprogramms berechnen wir die beiden Schnittpunkte zwischen Gerade g_1 und Kreis k_2:

$$\{\{x \to x_k + \frac{L(a-x_k)}{\sqrt{(a-x_k)^2+{y_k}^2}}, y \to y_k - \frac{L y_k}{\sqrt{(a-x_k)^2+{y_k}^2}}\},$$
$$\{x \to x_k + \frac{L(-a+x_k)}{\sqrt{(a-x_k)^2+{y_k}^2}}, y \to y_k + \frac{L y_k}{\sqrt{(a-x_k)^2+{y_k}^2}}\}\}$$

Der gesuchte Punkt P liegt stets rechts von M, also muß $x > 0$ sein. Das Lösungspaar mit positiver x Koordinate ist das richtige:

$$u = x_k + \frac{L(a - x_k)}{\sqrt{(a - x_k)^2 + {y_k}^2}} \tag{4}$$

$$v = y_k - \frac{L y_k}{\sqrt{(a - x_k)^2 + {y_k}^2}} \tag{5}$$

An Stelle von x_k, y_k setzen wir jetzt die Parameterdarstellung vom Kreis k_1 ein:

$$u(t) = r\cos[t] + \frac{L(a - r\cos[t])}{\sqrt{(a - r\cos[t])^2 + r^2\sin[t]^2}} \tag{6}$$

$$v(t) = r\sin[t] - \frac{L r\sin[t]}{\sqrt{(a - r\cos[t])^2 + r^2\sin[t]^2}} \tag{7}$$

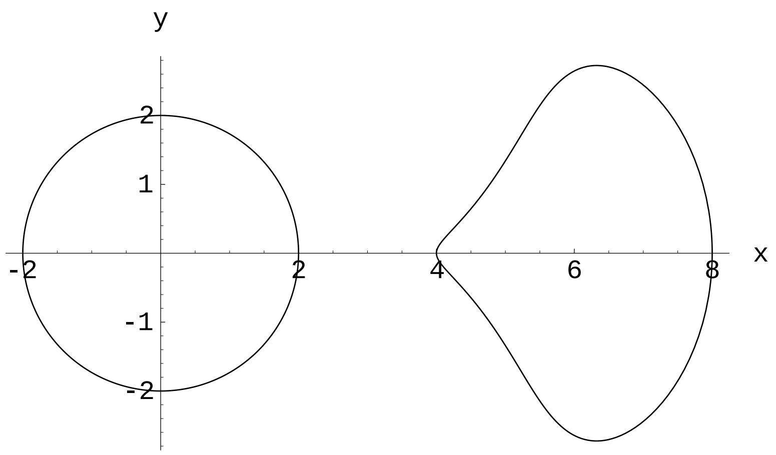

Abbildung 4: Kreis k_1 und Bahnkurve vom Punkt $P(u, v)$)

Berechnung des Flächeninhaltes

Der von der Schleife eingeschlossene Flächeninhalt berechnet sich aus

$$A = 2 \cdot \int\limits_{t=0}^{t=\pi} \dot{u} \cdot v \cdot dt \tag{8}$$

Die erste Ableitung der Funktionen $u(t)$ nach t lautet:

$$\dot{u}(t) = r\Big(-1 + \frac{Lr(r - a\cos[t])}{(a^2 + r^2 - 2ar\cos[t])^{3/2}}\Big)\sin[t] \tag{9}$$

$$dA = \dot{u}\, v\, dt = r^2\Big(-1 + \frac{Lr(r - a\cos[t])}{(a^2 + r^2 - 2ar\cos[t])^{3/2}}\Big)\Big(1 - \frac{L}{\sqrt{a^2 + r^2 - 2ar\cos[t]}}\Big)\sin[t]^2\, dt$$

Für das recht komplizierte Integral findet *Mathematica* nach einiger Rechenzeit eine geschlossene Lösung.

$$\begin{aligned}
A = 2\Bigg(&\bigg(\pi\sqrt{a^2+2ar+r^2}(a^2L^2 + 2aL^2r + 2a^2r^2 + L^2r^2 + 4ar^3 + 2r^4)\Big(1 - \tfrac{L}{\sqrt{a^2+2ar+r^2}}\Big)\bigg)\Big/ \\
&(4(-a^2 - 2ar - r^2)(-L + \sqrt{a^2+2ar+r^2})) + \\
&\frac{1}{-L+\sqrt{a^2+2ar+r^2}}\Bigg(Lr\sqrt{a^2+2ar+r^2}\Big(1 - \tfrac{L}{\sqrt{a^2+2ar+r^2}}\Big) \\
&\quad\Bigg(\frac{(a^2-2ar+r^2)\sqrt{\frac{a^2+2ar+r^2}{a^2-2ar+r^2}}\,\mathrm{EllipticE}\big[-\frac{4ar}{a^2-2ar+r^2}\big]}{r\sqrt{a^2+2ar+r^2}} + \\
&\quad\frac{2r\sqrt{\frac{a^2+2ar+r^2}{a^2-2ar+r^2}}\,\mathrm{EllipticK}\big[-\frac{4ar}{a^2-2ar+r^2}\big]}{\sqrt{a^2+2ar+r^2}} - \\
&\quad\frac{(a^2+r^2)\sqrt{\frac{a^2+2ar+r^2}{a^2-2ar+r^2}}\,\mathrm{EllipticK}\big[-\frac{4ar}{a^2-2ar+r^2}\big]}{r\sqrt{a^2+2ar+r^2}}\Bigg)\Bigg) - \\
&\frac{1}{8}\pi\Bigg(\frac{L^2\sqrt{a^2-2ar+r^2}\Big(1-\frac{L}{\sqrt{a^2-2ar+r^2}}\Big)\mathrm{Sign}[-a-r]\sqrt{\frac{\mathrm{Sign}[a-r]^2}{\mathrm{Sign}[-a-r]^2}}}{\big(-L+\sqrt{a^2-2ar+r^2}\big)\mathrm{Sign}[a-r]} + \\
&\quad\frac{L^2\sqrt{a^2-2ar+r^2}\Big(-1+\frac{L}{\sqrt{a^2-2ar+r^2}}\Big)\sqrt{\frac{\mathrm{Sign}[a-r]^2}{\mathrm{Sign}[a+r]^2}}\,\mathrm{Sign}[a+r]}{\big(-L+\sqrt{a^2-2ar+r^2}\big)\mathrm{Sign}[a-r]}\Bigg)\Bigg)
\end{aligned}$$

Nach Einsetzen der numerischen Werte $a = 3$, $r = 2$, $L = 6$ erhalten wir:

$$A = 2\left(-2\pi + 12\left(\frac{\mathrm{EllipticE}[-24]}{2} - \frac{5\,\mathrm{EllipticK}[-24]}{2}\right)\right) = 14.2704 \tag{10}$$

Ellipsenkurbel

Wir wollen nun die Aufgabenstellung modifizieren und betrachten Abbildung 5. Die Kurbelscheibe besitzt die Form einer Ellipse mit den Halbachsen $a = 2\,cm$, $b = 4\,cm$. Das Gleitlager befinde sich im Abstand $d = 12\,cm$ vom Mittelpunkt der Ellipse entfernt. Die Kurbelstange sei $l = 7\,cm$ lang.

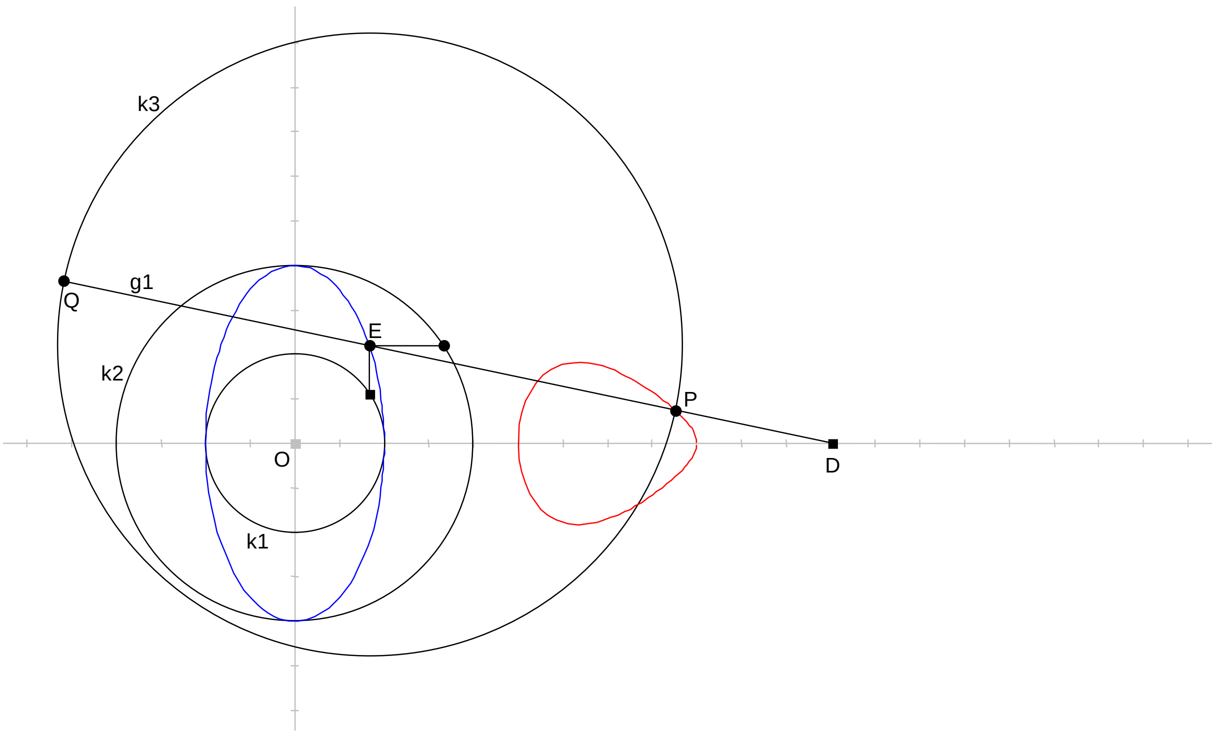

Abbildung 5: Ortskurve bei einer Ellipsenkurbelscheibe

Konstruktionsschritte im Programm EUKLID

```
k1  ist ein Kreis mit Mittelpunkt O und Radius 2 cm
k2  ist ein Kreis mit Mittelpunkt O und Radius 4 cm
P1  ist ein Basispunkt, der an k2 gebunden ist.
D  ist ein Basispunkt, der an xa gebunden ist.
P8  ist ein Basispunkt, der an k1 gebunden ist.
h3  ist eine Halbgerade mit Startpunkt O durch den Punkt P8
P9  ist ein Schnittpunkt der Linie h3 mit dem Kreis k2
P10  ist der 2. Schnittpunkt der Linie h3 mit dem Kreis k2
 ( g3  ist das Lot von P10 auf  ya )
 ( g4  ist das Lot von P8 auf  g3 )
E  ist der Schnittpunkt der Linien g4 und g3
k3  ist ein Kreis mit Mittelpunkt E und Radius 7 cm
```

```
g1  ist die Gerade  ( E ; D )
Q  ist ein Schnittpunkt der Linie g1 mit dem Kreis k3
P  ist der 2. Schnittpunkt der Linie g1 mit dem Kreis k3
OL3  ist eine Ortslinie des Punktes E, wenn P8 gezogen wird
OL4  ist eine Ortslinie des Punktes P, wenn P8 gezogen wird
```

Um die Parameterdarstellung der Ortskurve zu ermitteln, nutzen wir den gleichen Ansatz wie in der vorangegangenen Aufgabe. Die Koordinaten vom Punkt E auf der Ellipse lauten:

$$x_e(t) = a \cdot \cos t\,, \qquad y_e(t) = b \cdot \sin t \tag{11}$$

Die Kurbelstange - Gerade g_1 - läuft durch die Punkte $E(x_e, y_e)$ und $D(d, 0)$. Mit Hilfe der Zweipunktegleichung erhälten wir :

$$g_1 : \qquad \frac{y - y_e}{y_d - y_e} = \frac{x - x_e}{x_d - x_e} \tag{12}$$

Nun zeichnen wir um den Punkt E den Kreis k_3 mit dem Radius $l = 7\,cm$. Seine Gleichung lautet:

$$k_2 : \qquad (x - x_e)^2 + (y - y_e)^2 = l^2, \quad l = 7\,cm \tag{13}$$

Mit Hilfe eines Computeralgebraprogramms berechnen wir die beiden Schnittpunkte zwischen Gerade g_1 und Kreis k_3:

$$\{\{x \to x_e + \frac{l(d-x_e)}{\sqrt{(d-x_e)^2+y_e{}^2}}, y \to y_e - \frac{ly_e}{\sqrt{(d-x_e)^2+y_e{}^2}}\},$$
$$\{x \to x_e + \frac{L(-d+x_e)}{\sqrt{(d-x_e)^2+y_e{}^2}}, y \to y_e + \frac{ly_e}{\sqrt{(d-x_e)^2+y_e{}^2}}\}\}$$

Der gesuchte Punkt P liegt stets rechts von O, also muß $x > 0$ sein. Das Lösungspaar mit positiver x Koordinate ist das richtige:

$$u = x_e + \frac{l(d - x_e)}{\sqrt{(d - x_e)^2 + y_e{}^2}} \tag{14}$$

$$v = y_e - \frac{ly_e}{\sqrt{(d - x_e)^2 + y_e{}^2}} \tag{15}$$

An Stelle von x_e, y_e setzen wir die Parameterdarstellung (9) der Ellipse ein:

$$u(t) = a\cos[t] + \frac{l(d - a\cos[t])}{\sqrt{(d - a\cos[t])^2 + b^2\sin[t]^2}} \tag{16}$$

$$v(t) = b\sin[t] - \frac{lb\sin[t]}{\sqrt{(d - a\cos[t])^2 + b^2\sin[t]^2}} \tag{17}$$

In einem Funtionenplotter wie *GNU-Plot, Funktion* oder *Mathematica* kann nun die Parameterkurve $u(t)$, $v(t)$ dargestellt werden.

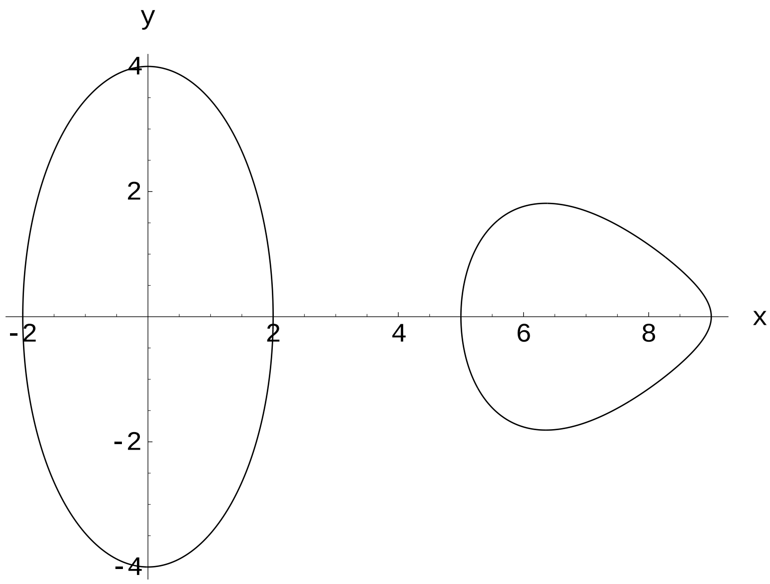

Abbildung 6: Ellipse und zugehörige Ortskurve auf der Kurbelstange

Flächenberechnung

Wir wollen nun den von der Ortskurve eingeschlossenen Flächeninhalt berechnen. Achtung ! Der Punkt P durchläuft die Ortskurve in genau entgegengesetzter Richtung wie dem Drehsinn der Kurbel entspricht.

$$A = 2 \cdot \int_{t=\pi}^{t=0} \dot{u} \cdot v \cdot dt \tag{18}$$

$$\dot{u}(t) = \sin[t] \left(-a + \frac{b^2 l (a - d\cos[t])}{\left((d - a\cos[t])^2 + b^2 \sin[t]^2\right)^{3/2}} \right) \tag{19}$$

$$dA = b \sin[t]^2 \left(-a + \frac{b^2 l (a - d\cos[t])}{\left((d - a\cos[t])^2 + b^2 \sin[t]^2\right)^{3/2}} \right) \left(1 - \frac{l}{\sqrt{(d - a\cos[t])^2 + b^2 \sin[t]^2}} \right) \tag{20}$$

Im Gegensatz zur Kreiskurbel ist bei der Ellipse keine geschlossene Integration möglich. Das Integral kann nur numerisch ausgewertet werden:

$$A = 2 \cdot \int_{t=\pi}^{t=0} \dot{u} \cdot v \cdot dt = 10.5697 \tag{21}$$