Besondere Punkte im Dreieck Teil I

Ortskurve des Höhenschnittpunktes

Eine Aufgabe von Ingmar Rubin

Gegeben sei das $\triangle ABC$ und sein Umkreis k mit dem Radius r. Der Mittelpunkt vom Umkreis befinde sich im Koordinatenursprung, $M(0,0)$. Ferner seien gegeben der Winkel α zwischen $x-$ Achse und Strecke $\overline{MA}$ und der Winkel β zwischen $x-$ Achse und Strecke $\overline{MB}$. Die Höhen des Dreiecks ABC schneiden sich im Punkt $H(x,y)$.

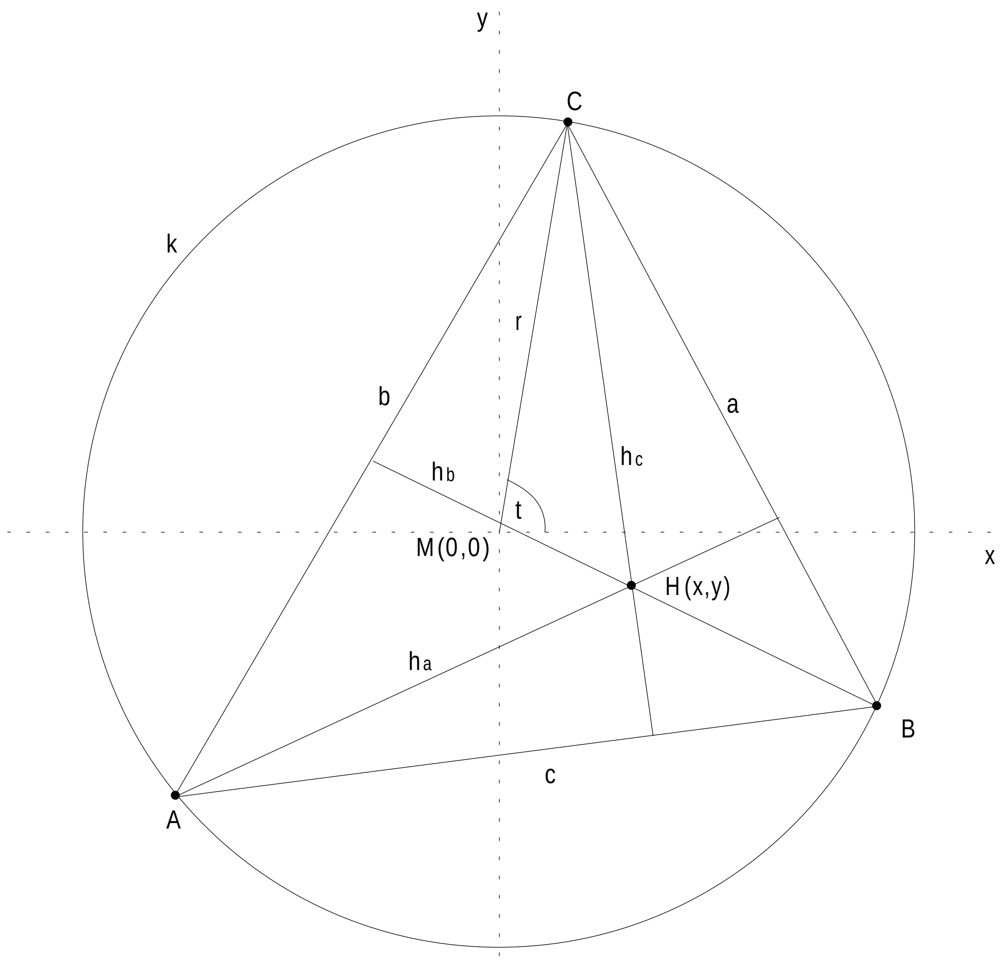

Abbildung 1: Bild zur Aufgabenstellung

1. Welche Ortskurve beschreibt der Punkt P wenn Punkt C einmal entlang der Kreisperipherie bewegt wird ? Der Drehwinkel t aus Abbildung 1 duchläuft das Intervall $0 \leq t \leq 2\pi$. Benutze zur Darstellung das Programm **EUKLID** `http://www.mechling.de/` (Beispieldatei hoehenschnittpunktkurve.geo) oder das Programm **Zirkel und Lineal** `http://mathsrv.ku-eichstaett.de/MGF/homes/grothmann/zul.html`

2. Leite eine Paramterdarstellung für die Koordinaten von H in der Form $x = x(t)$ und $y = y(t)$ her.

3. Untersuche die Fälle, das der Punkt B einmal außerhalb und einmal innerhalb des Umkreises liege. Betrachte speziell die Ortskurven für

   (a) $R = \overline{MB} = 0.5 \cdot r$ und

   (b) $R = \overline{MB} = 2.0 \cdot r$

   Zeichne die Kurven für $r = 10\,cm$, $\alpha = \frac{4\pi}{3}$ und $\beta = 2\pi$ mit Hilfe eines Computerprogramms.

4. Für das Winkelpaar $\alpha = \pi, \quad \beta = 2\pi$ vereinfachen sich beide Kurven aus Fall (a) und (b). Transformiere die Parameterdarstellung der Ortskurven in die algebraische Normalform $F(x, y) = 0$ (Hinweis: F darf keine Winkelfunktionen enthalten !).

5. Bestimme aus $F(x, y)$ die algebraische Ordnung der Kurve. Versuche die Darstellung einer bekannten algebraischen Kurve zuzuordnen.

Punktezahl=10

Konstruktion der Ortskurve in EUKLID

Die Höhen eines $\triangle ABC$ schneiden sich in einem gemeinsamen Punkt H, dem Höhenschnittpunkt des Dreiecks.

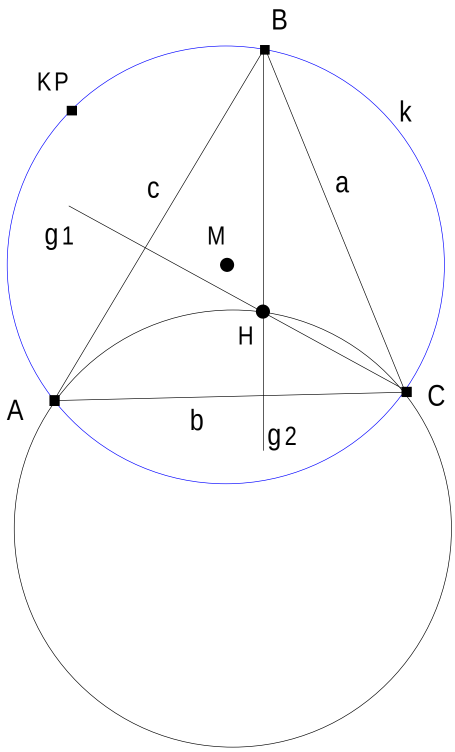

Abbildung 2: Ortskurve des Höhenschnittpunktes in EUKLID

Der Konstruktionstext in EUKLID lautet:

```
M  ist ein freier Basispunkt
KP ist ein freier Basispunkt
k  ist ein Kreis um M durch KP
A  ist ein Basispunkt, der an k gebunden ist.
C  ist ein Basispunkt, der an k gebunden ist.
B  ist ein freier Basispunkt
s1  ist die Strecke  [ A ; C ]
s2  ist die Strecke  [ C ; B ]
s3  ist die Strecke  [ B ; A ]
g1  ist das Lot von C auf  s3
g2  ist das Lot von B auf  s1
H   ist der Schnittpunkt der Linien g1 und g2
OL1 ist eine Ortslinie des Punktes H, wenn C gezogen wird
```

Parameterdarstellung der Ortskurve

Wir bezeichnen die Koordinaten der Punkte A, B, C mit :

$$A(x_a, y_a), \quad B(x_b, y_b), \quad C(x_c, y_c) \tag{1}$$

Die Höhen stehen senkrecht zu den Dreiecksseiten und verlaufen durch die gegenüberliegenden Eckpunkte. Daraus kann die Geradengleichung der Höhen ermittelt werden.

$$m_b = \frac{y_c - y_a}{x_c - x_a} \qquad m_{hb} = -\frac{1}{m_b} = \frac{x_a - x_c}{y_c - y_a} \tag{2}$$

$$y_b = m_{hb} \cdot x_b + n_b \quad \rightarrow \quad n_b = y_b - m_{hb} \cdot x_b \tag{3}$$

$$h_b : \qquad y = \frac{x_a - x_c}{y_c - y_a} \cdot x + y_b - \frac{x_a - x_c}{y_c - y_a} \cdot x_b \tag{4}$$

$$m_c = \frac{y_b - y_a}{x_b - x_a} \qquad m_{hc} = -\frac{1}{m_c} = \frac{x_a - x_b}{y_b - y_a} \tag{5}$$

$$y_c = m_{hc} \cdot x_c + n_c \quad \rightarrow \quad n_c = y_c - m_{hc} \cdot x_c \tag{6}$$

$$h_c : \qquad y = \frac{x_a - x_b}{y_b - y_a} \cdot x + y_c - \frac{x_a - x_b}{y_b - y_a} \cdot x_c \tag{7}$$

Für die Schnittpunktberechnung genügt die Kenntniss von zwei der drei Höhenlinien. Die Tatsache da sich alle drei Höhen in einem Punkt schneiden sei als vorrausgesetzt betrachtet. Aus $h_b = h_c$ folgen die Schnittpunktkoordinaten von H

$$x = \frac{(x_a(x_b(-y_a + y_b) + x_c(y_a - y_c)) - (x_b x_c + (y_a - y_b)(y_a - y_c))(y_b - y_c))}{(-x_b y_a + x_c y_a + x_a y_b - x_c y_b - x_a y_c + x_b y_c)} \tag{8}$$

$$y = \frac{(-(x_a - x_b)((x_a - x_c)(x_b - x_c) + y_a y_b) + (x_a y_a - x_b y_b + x_c(-y_a + y_b))y_c)}{(x_b y_a - x_c y_a - x_a y_b + x_c y_b + x_a y_c - x_b y_c)} \tag{9}$$

Wir ersetzen nun die kartesischen Koordinaten der Punkte A, B, C durch ihre Polarkoordinaten:

$$x_a = r\cos(\alpha), \qquad y_a = r\sin(\alpha) \tag{10}$$

$$x_b = R\cos(\beta), \qquad y_b = R\sin(\beta), \qquad \overline{MB} = R \tag{11}$$

$$x_c = r\cos(t), \qquad y_c = r\sin(t) \tag{12}$$

Anschließend werden die Polarkoordinaten in (8) und (9) eingesetzt, woraus die gewünschte Parameterdarstellung entsteht:

$$x(t) = r(\cos[t] + \cos[\alpha]) + \frac{(r - R)(r + R)\cos\left[\frac{t+\alpha}{2}\right]}{-r\cos\left[\frac{t-\alpha}{2}\right] + R\cos\left[\frac{1}{2}(t + \alpha - 2\beta)\right]} + R\cos[\beta] \tag{13}$$

$$y(t) = r(\sin[t] + \sin[\alpha]) - \frac{(r - R)(r + R)\sin\left[\frac{t+\alpha}{2}\right]}{r\cos\left[\frac{t-\alpha}{2}\right] - R\cos\left[\frac{1}{2}(t + \alpha - 2\beta)\right]} + R\sin[\beta] \tag{14}$$

Fall (a) $R = r$

Für den Fall, das $R = r$ ist, d.h. Punkt B liegt auf dem Kreis erhalten wir:

$$x(t) = r \cdot \cos[t] + r \cdot (\cos[\alpha] + \cos[\beta]) \tag{15}$$

$$y(t) = r \cdot \sin[t] + r \cdot (\sin[\alpha] + \sin[\beta]) \tag{16}$$

Die Ortskurve entspricht einem Kreis mit dem Radius r. Der Mittelpunkt befindet sich bei

$$x_m = r \cdot (\cos[\alpha] + \cos[\beta]), \qquad y_m = r \cdot (\sin[\alpha] + \sin[\beta]) \tag{17}$$

Damit kann Fall (a) der allgemeinen Kegelschnittsgleichung zugeordnet werden (algebraische Kurve zweiter Ordnung). In kartesischen Koordinaten lautet die Gleichung der Ortskurve:

$$(x - x_m)^2 + (y - y_m)^2 = r^2 \tag{18}$$

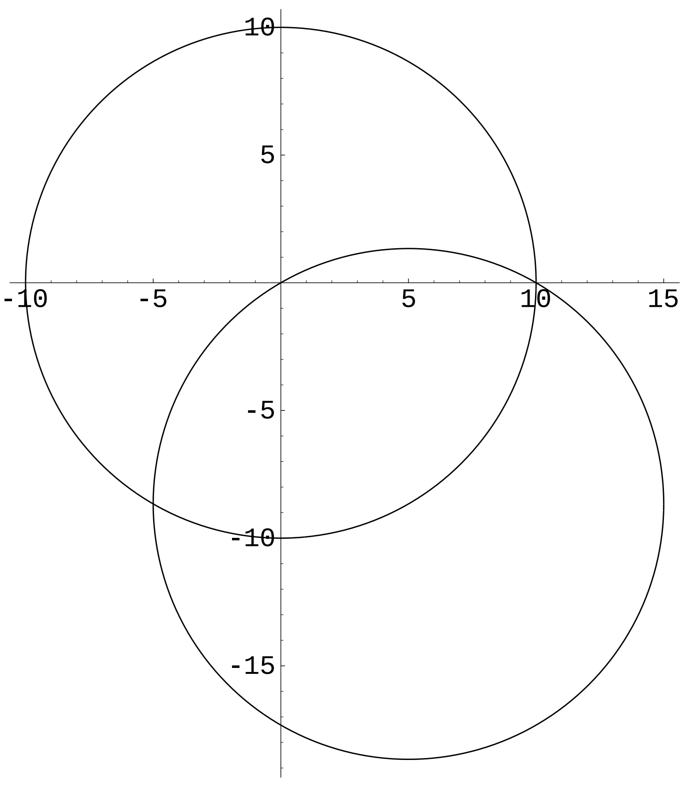

Abbildung 3: Ortskurve für $\alpha = \frac{4\pi}{3}, \beta = 2\pi$ und $r = R = 10$

Fall (b) $R = 0.5 \cdot r$

Der Punkt B liegt innerhalb vom Kreis k. Die Parameterdartstellung der Ortskurve besitzt im Intervall $0 \leq t \leq 2\pi$ Polstellenen in Abhängigkeit von α und β.

$$x(t) = \frac{r}{4} \cdot \left(4(\cos[t] + \cos[\alpha]) + \frac{6\cos\left[\frac{t+\alpha}{2}\right]}{-2\cos\left[\frac{t-\alpha}{2}\right] + \cos\left[\frac{1}{2}(t+\alpha-2\beta)\right]} + 2\cos[\beta] \right) \tag{19}$$

$$y(t) = \frac{r}{4} \cdot \left(4(\sin[t] + \sin[\alpha]) - \frac{6\sin\left[\frac{t+\alpha}{2}\right]}{2\cos\left[\frac{t-\alpha}{2}\right] - \cos\left[\frac{1}{2}(t+\alpha-2\beta)\right]} + 2\sin[\beta] \right) \tag{20}$$

Aus den Polstellen resultiert eine relativ schwierige graphische Dartstellung.

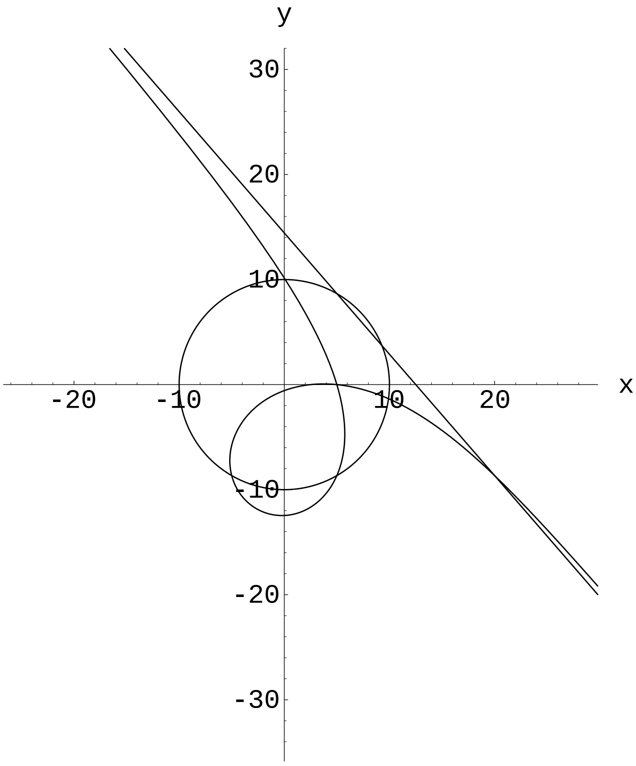

Abbildung 4: Ortskurve für $\alpha = \frac{4\pi}{3}, \beta = 2\pi$ und $r = 10$, $R = 5$

Setzt man $\alpha = \pi, \beta = 2\pi$ ergibt sich

$$x(t) = r \cdot \cos[t], \qquad y(t) = -\frac{r}{2} \cdot \cot\left(\frac{t}{2}\right) + r \cdot \sin[t] \tag{21}$$

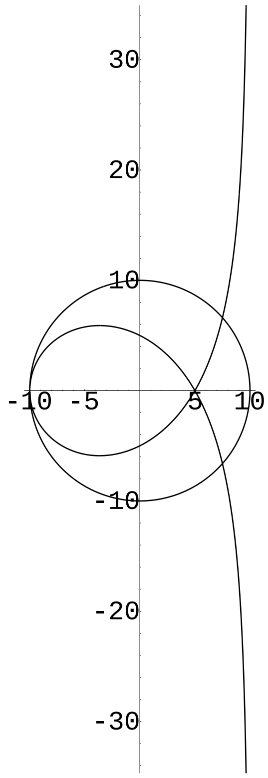

Abbildung 5: Ortskurve für $\alpha = \pi, \beta = 2\pi$ und $r = 10$, $R = 5$

Diese Gleichung kann auf die allgemeine algebraische Kurvendarstellung $F(x, y) = 0$ transformiert werden. Wir ersetzen:

$$\cot\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{\sin(t)}{1 - \cos(t)} \tag{22}$$

und erhalten

$$y(t) =) = -\frac{r}{2} \cdot \frac{\sin(t)}{1 - \cos(t)} + r \cdot \sin[t] \tag{23}$$

Nun werden die trigonometrischen Funktionen mit Hilfe von x substituiert:

$$\cos(t) = \frac{x}{r}, \qquad \sin(t) = \sqrt{1 - \cos^2(t)} = \sqrt{1 - \frac{x^2}{r^2}} \tag{24}$$

Das Einsetzen in $y(t)$ liefert:

$$y = r\sqrt{1 - \frac{x^2}{r^2}} - \frac{r\sqrt{1 - \frac{x^2}{r^2}}}{2(1 - \frac{x}{r})} = \frac{(r - 2x)(r + x)}{2r\sqrt{1 - \frac{x^2}{r^2}}} \tag{25}$$

Nach dem Quadrieren beider Seiten erhält man eine algebraische Kurvengleichung 3. Ordnung. Ein Vergleich mit [Bronstein] oder einem ähnlichen Nachschlagewerk zeigt, das es sich um eine Form der *Strophoide* handelt.

$$y^2 \cdot 4 \cdot (r - x) = (r - 2 \cdot x)^2 \cdot (r + x) \tag{26}$$

Zum Vergleich die Normalform der Strophoide:

$$(x + a) \cdot x^2 - (x - a) \cdot y^2 = 0 \tag{27}$$

Fall (c) $R = 2 \cdot r$

Der Punkt B liegt außerhalb vom Kreis k. Die Parameterdartstellung der Ortskurve besitzt im Intervall $0 \leq t \leq 2\pi$ Polstellenen in Abhängigkeit von α und β.

$$x(t) = r\left(\cos[t] + \cos[\alpha] + \frac{3\cos\left[\frac{t+\alpha}{2}\right]}{\cos\left[\frac{t-\alpha}{2}\right] - 2\cos\left[\frac{1}{2}(t+\alpha-2\beta)\right]} + 2\cos[\beta]\right) \tag{28}$$

$$y(t) = r\left(\sin[t] + \sin[\alpha] + \frac{3\sin\left[\frac{t+\alpha}{2}\right]}{\cos\left[\frac{t-\alpha}{2}\right] - 2\cos\left[\frac{1}{2}(t+\alpha-2\beta)\right]} + 2\sin[\beta]\right) \tag{29}$$

Aus den Polstellen resultiert eine relativ schwierige graphische Darstellung. Je nach Wahl der Winkel ergibt sich eine Kurve welche sich asymptotisch der Polgeraden nähert.

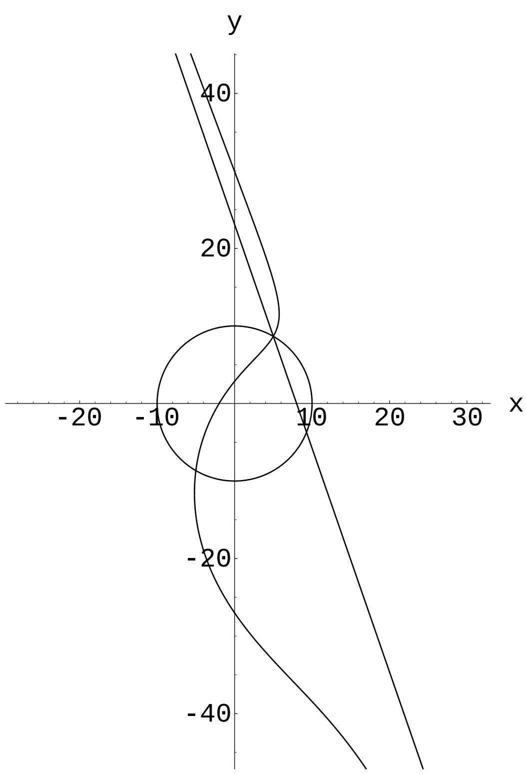

Abbildung 6: Ortskurve für $\alpha = \frac{4\pi}{3}, \beta = 2\pi$ und $r = 10$, $R = 20$

Wie im Fall (b) setzen wir $\alpha = \pi$ und $\beta = 2\pi$ und erhalten:

$$x(t) = r\left(1 + \cos[t] + \frac{3\cos\left[\frac{\pi+t}{2}\right]}{-2\cos\left[\frac{1}{2}(-3\pi+t)\right] + \cos\left[\frac{1}{2}(-\pi+t)\right]}\right) \tag{30}$$

$$y(t) = r\left(\sin[t] + \frac{3\sin\left[\frac{\pi+t}{2}\right]}{-2\cos\left[\frac{1}{2}(-3\pi+t)\right] + \cos\left[\frac{1}{2}(-\pi+t)\right]}\right) \tag{31}$$

Nach Vereinfachung und Zusammenfassen erhält man:

$$x(t) = r \cdot \cos[t], \qquad y(t) = r \cdot \left(\cot\left[\frac{t}{2}\right] + \sin[t]\right) \tag{32}$$

Die Gleichung läßt sich wie im Fall (b) duch Eliminierung der Winkelfunktionen auf eine algebraische Form reduzieren.

$$\cot\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{\sin(t)}{1-\cos(t)} \quad \rightarrow \quad y(t) = r \cdot \left(\frac{\sin(t)}{1-\cos(t)} + \sin(t)\right) \tag{33}$$

Die trigonometrischen Funktionen werden mit Hilfe von x substituiert:

$$\cos(t) = \frac{x}{r}, \qquad \sin(t) = \sqrt{1-\cos^2(t)} = \sqrt{1-\frac{x^2}{r^2}} \tag{34}$$

$$y = r\left(\sqrt{1-\frac{x^2}{r^2}} + \frac{\sqrt{1-\frac{x^2}{r^2}}}{1-\frac{x}{r}}\right) = \frac{(2r-x)(r+x)}{r\sqrt{1-\frac{x^2}{r^2}}} \tag{35}$$

Nach Quadrieren und Zusammenfassen erhält man:

$$y^2 \cdot (r-x) = 4 \cdot r^3 - 3 \cdot r \cdot x^2 + x^3 \tag{36}$$

Es handelt sich wie im Fall (b) um eine algebraische Kurve 3. Ordnung, welche Ähnlichkeit mit der *Strophoide* besitzt.

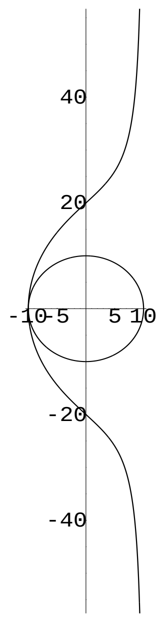

Abbildung 7: Ortskurve für $\alpha = \pi, \beta = 2\pi$ und $r = 10,\ R = 20$