Inversion einer Geraden am Kreis, Teil I

Gegeben sei der Kreis k mit dem Radius r und dem Mittelpunkt in $O(0,0)$. Die Gerade g_1 habe den Anstieg m und schneidet die $x-$ Achse bei $x = x_0$. Der Punkt P befinde sich auf g_1. Der Punkt P' befindet sich auf der Geraden g_2, welche den Ursprung O mit P verbindet.

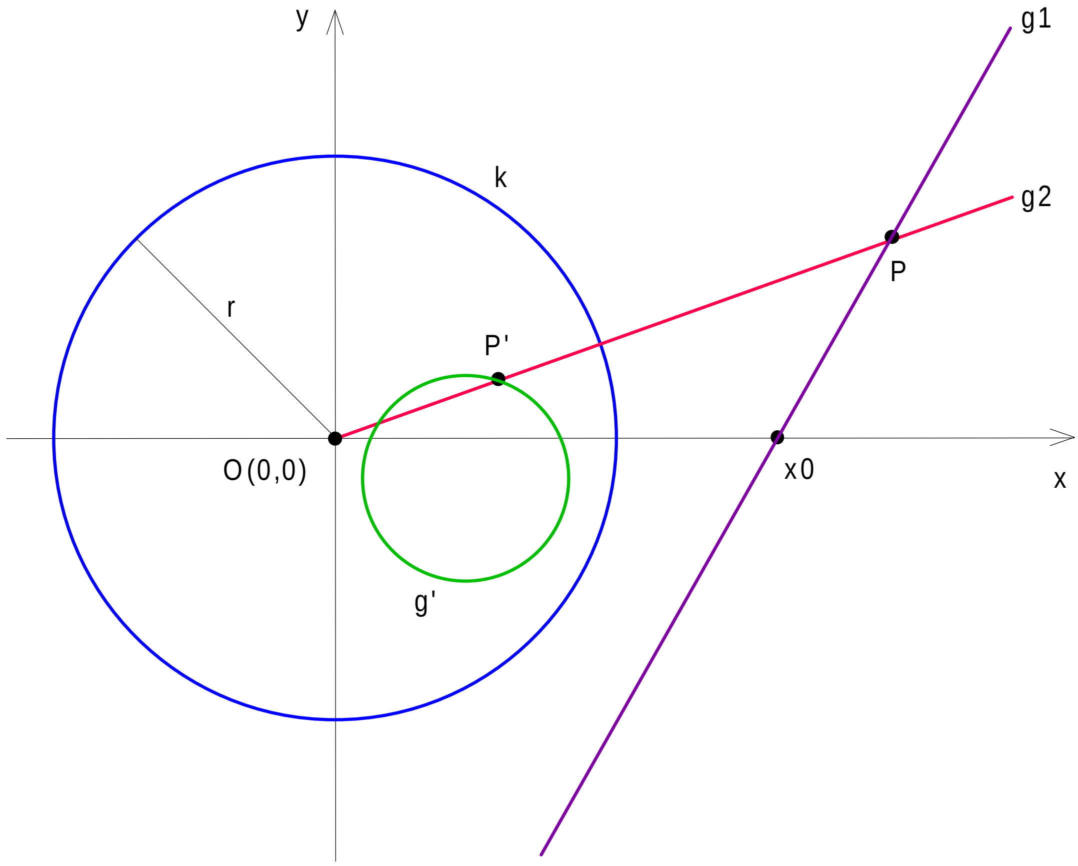

Abbildung 1: Inversion der Geraden g_1 am Kreis k

Unter der Inversion $P \to P'$ sei die Abbildung $\overline{OP} \cdot \overline{OP'} = r^2$ definiert. Durchläuft der Punkt $P(x_1(t), y_1(t))$ die Gerade g_1 beschreibt P' die Bildkurve g'.

1. Leiten Sie für die Inversionskurve g' eine Parameterdarstellung $x_i(t), y_i(t)$ her. Benutzen Sie als laufenden Parameter $t = x$.

2. Zeichen Sie den Kreis k, die Gerade g_1 und ihr Inversionsbild g' für die Werte $r = 5$, $m = 2$ und $x_0 = 8$ im Intervall $-4 \leq t \leq 4$ in ein Diagramm.

3. Für $-\infty < t < +\infty$ ist das Inversionsbild ein Kreis. Ermitteln Sie Radius R und Mittelpunkt $M(x_m, y_m)$ von diesem Kreis !

Punktezahl = 10

Parameterdarstellung für g'

Wir betrachten den Punkt $P(x_1, y_1)$ auf der Geraden g_1. Sein Abstand u zum Inversionszentrum O beträgt :

$$\overline{OP}: \qquad u = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \tag{1}$$

Der Punkt $P'(x_i, y_i)$ liegt auf der Verbindungslinie $\overline{OP}$. Für seine Koordinaten gilt die Verhältnisgleichung:

$$\frac{x_i}{y_i} = \frac{x_1}{y_1} \quad \rightarrow \quad y_i = x_i \cdot \frac{y_1}{x_1} \tag{2}$$

Der Abstand von P' zum Inversionszentrum beträgt:

$$\overline{OP'}: \qquad v = \sqrt{x_i^2 + y_i^2} = \sqrt{x_i^2 + x_i^2 \cdot \left(\frac{y_1}{x_1}\right)^2} = \frac{x_i}{x_1} \cdot \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \tag{3}$$

Die Strecken u, v müssen der Inversionsgleichung genügen:

$$u \cdot v = r^2 \quad \rightarrow \quad \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \frac{x_i}{x_1} \cdot \sqrt{x_1^2 + y_1^2} = r^2 \tag{4}$$

Gleichung (4) wird nach x_i aufgelöst :

$$x_i = \frac{r^2 \cdot x_1}{x_1^2 + y_1^2} \tag{5}$$

Das Ergebnis wird in Gleichung (2) eingesetzt:

$$y_i = x_i \cdot \frac{y_1}{x_1} = \frac{r^2 \cdot y_1}{x_1^2 + y_1^2} \tag{6}$$

Um alle Punkte auf der Geraden g bei der Inversion zu erfassen, ersetzen wir x_1, y_1 durch die Parameterdarstellung von g :

$$g: \qquad x_1(t) = x_0 + t, \quad y_1(t) = m \cdot t \tag{7}$$

Für die Inversionskurve g' erhalten wir:

$$g': \qquad x_i(t) = \frac{r^2\,(t + x_0)}{m^2\,t^2 + (t + x_0)^2}, \qquad y_i(t) = \frac{m\,r^2\,t}{m^2\,t^2 + (t + x_0)^2} \tag{8}$$

Graphische Darstellung

Wir können nun alle bei der Inversion beteiligten Kurven zeichnen. Der Vollständigkeit halber seien ihre Parameterdartstellungen nocheinmal zusammengetragen:

Inversionskreis k :

$$k: \qquad x_k(t) = r \cdot \cos(t), \qquad y_k(t) = r \cdot \sin(t) \tag{9}$$

Gerade g_1 :

$$g_1: \qquad x_1(t) = x_0 + t, \qquad y_1(t) = m \cdot t \tag{10}$$

Inversionsbild g' :

$$g': \qquad x_i(t) = \frac{r^2\,(t + x_0)}{m^2\,t^2 + (t + x_0)^2}, \qquad y_i(t) = \frac{m\,r^2\,t}{m^2\,t^2 + (t + x_0)^2} \tag{11}$$

Für $m = 2$, $x_0 = 8$ und $r = 5$ erhält man Abbildung 2 als Inversionskurve.

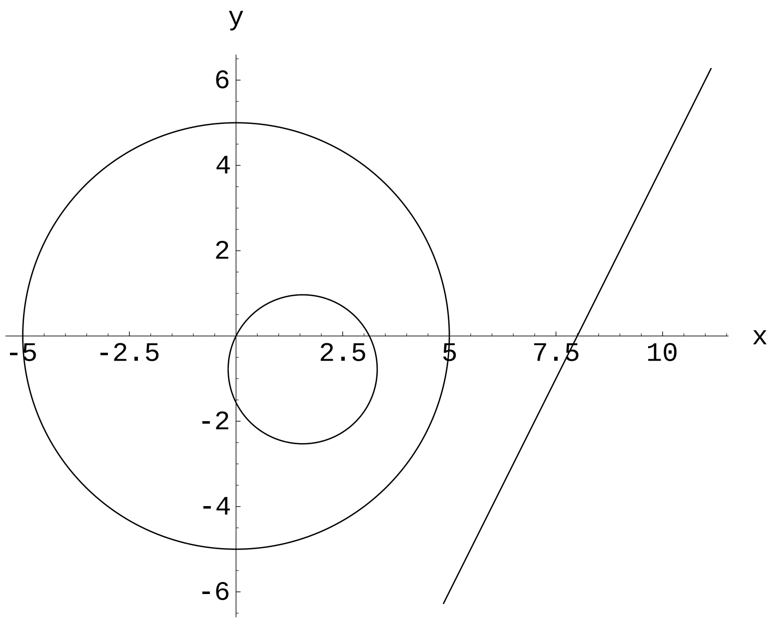

Abbildung 2: Inversion der Geraden g am Kreis k, $-4 \leq t \leq +4$

Inversionsbild für $-\infty < t < +\infty$

Die Gerade g erzeugt für $-\infty < t < +\infty$ einen geschlossenen Kreis als Inversionsbild. Wir wollen aus den Gleichungen $x_i(t)$, $y_i(t)$ nun den Mittelpunkt $M(x_m, y_m)$ und Radius R berechnen.

$$x_i(t) = \frac{r^2\,(t+x_0)}{m^2\,t^2 + (t+x_0)^2}, \qquad y_i(t) = \frac{m\,r^2\,t}{m^2\,t^2 + (t+x_0)^2} \tag{12}$$

Um die drei Unbekannten x_m, y_m, R zu bestimmen, werden drei Punkte auf dem Kreis benötigt. Wir wählen

$$t = -1: \qquad x_1 = \frac{r^2(-1+x_0)}{m^2 + (-1+x_0)^2}, \quad y_1 = -\frac{mr^2}{m^2 + (-1+x_0)^2} \tag{13}$$

$$t = 0: \qquad x_2 = \frac{r^2}{x_0}, \quad y_2(0) = 0 \tag{14}$$

$$t = 1: \qquad x_3 = \frac{r^2(1+x_0)}{m^2 + (1+x_0)^2}, \quad y_3 = \frac{mr^2}{m^2 + (1+x_0)^2} \tag{15}$$

Die Koordinaten der drei Punkte müssen den folgenden Kreisgleichungen genügen:

$$gl1: \qquad (x_1 - x_m)^2 + (y_1 - y_m)^2 = R^2 \tag{16}$$

$$gl2: \qquad (x_2 - x_m)^2 + (y_2 - y_m)^2 = R^2 \tag{17}$$

$$gl3: \qquad (x_3 - x_m)^2 + (y_3 - y_m)^2 = R^2 \tag{18}$$

Mit dem Kommando *Solve* lösen wir in *Mathematica* die drei Gleichungen auf:

```
Solve[{gl1, gl2, gl3},{xm, ym, R}]
```

$$x_m = \frac{r^2}{2\,x_0}, \qquad y_m = -\frac{r^2}{2\,m\,x_0}, \qquad R = \frac{r^2}{2\,m\,x_0} \cdot \sqrt{m^2+1} \tag{19}$$

Mit den Werten $m = 2, \quad x_0 = 8, \quad r = 5$ erhalten wir:

$$x_m = \frac{25}{16} = 1.5625, \qquad y_m = -\frac{25}{32} = -0.78125, \qquad R = \frac{25\sqrt{5}}{32} = 1.7469 \tag{20}$$

Anhang : Ausgabe der Kurven mit GNU-Plot

In der vorliegenden Aufgabe mußten mehrere Kurven in Parameterdarstellung in ein Diagramm geplottet werden. Das frei erhältliche Programm *GNU-Plot* eignet sich dafür sehr gut. Es kann für das Betriebssystemm LINUX als auch für Win95/98/NT aus dem Internet geladen werden.

`http://www.usf.uni-osnabrueck.de/~breiter/tools/gnuplot/`

Um die Gerade g, den Kreis k und die Bildkurve g' zu plotten, fertigt man in einem Texteditor das Scriptfile *inversor.plt* an. Die einzelnen Kommandos sind in der GNU-Plot Hilfe erläutert.

```
reset
set parametric
set noborder
set nokey
set xtics axis nomirror
set ytics axis nomirror
set zeroaxis
set samples 400
set label "x" at 10.7,-0.3
set label "y" at -0.8,6.0
set label "k" at 3.8,3.8
set label "g1" at 10,5
set xrange [-7:11]
set yrange [-6:6]
set trange [-pi:pi]
m=2.0
r=5.0
x0=8.0
xg(t)= x0 + t
yg(t)= m*t
xk(t)=r*sin(t)
yk(t)=r*cos(t)
xm=r*r/(2*x0)
ym=-r*r/(2*m*x0)
r2=r*r*sqrt(1+m*m)/(2*m*x0)
xi(t)= xm + r2*cos(t)
yi(t)= ym + r2*sin(t)
plot xg(t),yg(t), xi(t),yi(t), xk(t),yk(t) with lines
```

Unter Win95 / 98 kann die Graphik dann über die Zwischenablage in ein WinWord-Dokument kopiert werden. Wer mit LATEX arbeitet erzeugt am besten gleich eine Postscriptdatei. Im GNU-Plot Scriptfile werden zusätzlich Anweisungen eingefügt, welche die Graphik als EPS-File (Encapsulatet Postsript Format) ausgeben. Achtung ! In diesem Fall erscheint keine graphische Ausgabe auf dem Bildschirm.

```
reset
set terminal postscript eps 22
set terminal postscript color
set terminal postscript solid
set terminal postscript "Arial" 12
set output "g_inversor.eps"
set parametric
set noborder
set nokey
set xtics axis nomirror
set ytics axis nomirror
usw.
```

Das Bild wird innerhalb von LATEX in einer *picture* Umgebung eingebunden. Die Stildatei *epsfig* muß im LATEX-Kopf als Package aufgenommen werden.

```
\vspace{1cm}
\begin{figure}[htbp]
  \centering \leavevmode
   \epsfbox{g_inversor.eps}
  \caption{Inversion der Geraden $g$ am Kreis $k$}
\end{figure}
```

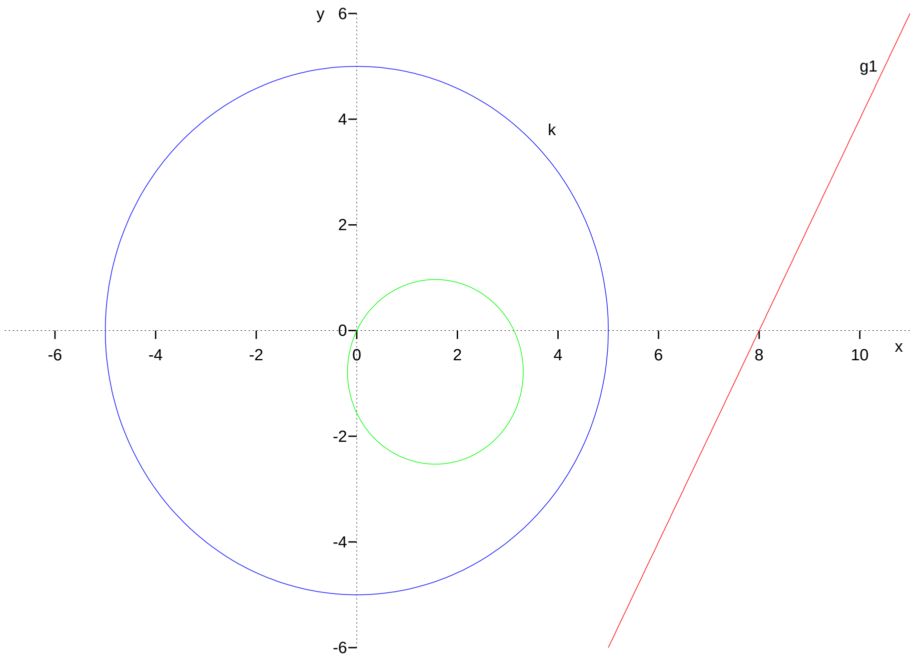

Abbildung 3: Ausdruck der Inversionskurven mit dem Programm GNU-Plot