Untersuchung der Eikurve

Eine Aufgabe von Ingmar Rubin

Gegeben sei die Gleichung der *Eikurve* in Polarkoordinaten:

$$r(\varphi) = a \cdot \sin^3(\varphi) - b \cdot \cos^3(\varphi), \quad a, b > 0 \tag{1}$$

1. Überführen Sie die Gleichung in kartesische Koordinaten $F(x, y) = 0$ und bestimmen daraus die algebraische Ordnung der Kurve,
2. Zeichen Sie das Bild der Kurve $r = r(\varphi)$ im Intervall $0 \leq \varphi \leq \pi$,
3. Ermitteln Sie die Schnittpunkte mit der x- und y-Achse,
4. Bestimmen sie Minimum und Maximum bezüglich der x Achse,
5. Berechnen Sie den von der Kurve eingeschlossenen Flächeninhalt,
6. Ermitteln Sie die Koordinaten des Flächenschwerpunktes $S(x_s, y_s)$
7. Bestimmen Sie durch numerische Integration nährungsweise die Kurvenlänge für das Intervall $0 \leq \varphi \leq \pi$

1. Algebraische Gleichungsform

Wir multiplizieren beide Seiten der Gleichung mit dem Faktor r^3:

$$r^4 = a \cdot r^3 \cdot \sin^3(\varphi) - b \cdot r^3 \cdot \cos^3(\varphi) \tag{2}$$

Für kartesische Koordinaten gilt die Umrechnung:

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad x = r \cdot \cos(\varphi), \quad y = r \cdot \sin(\varphi) \tag{3}$$

Damit erhalten wir eine algebraische Kurvengleichung 4.Ordnung:

$$F(x,y) = (x^2 + y^2)^2 + b\ x^3 - a\ y^3 \quad a, b > 0 \tag{4}$$

2. Bild der Kurve im Intervall $0 \leq \varphi \leq \pi$

Das Bild der Kurve ist einem Ei ähnlich, weshalb sie auch als *Eikurve* bezeichnet wird.

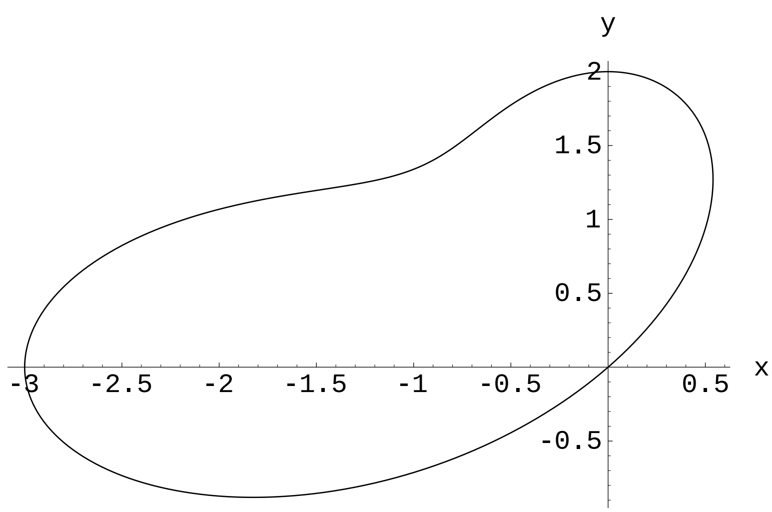

Abbildung 1: Eikurve $\quad a = 2.0,\ b = 3.0$

3.1 Schnittpunkte mit der $x-$ Achse

$$\begin{aligned} y &= 0 \quad \rightarrow \quad F(x,y) = (x^2 + y^2)^2 + b\ x^3 - a\ y^3 \\ x^4 + b\ x^3 &= 0 \\ x^3 \cdot (x + b) &= 0 \\ x_1 &= 0, \quad x_2 = -b \end{aligned}$$

3.2 Schnittpunkte mit der $y-$ Achse

$$\begin{aligned} x &= 0 \quad \rightarrow \quad F(x,y) = (x^2 + y^2)^2 + b\ x^3 - a\ y^3 \\ y^4 - a\ y^3 &= 0 \\ y^3 \cdot (y - a) &= 0 \\ y_1 &= 0, \quad y_2 = a \end{aligned}$$

Extrempunkte bezüglich der Koordinatenachsen

Wir zerlegen die Funktion $r(\varphi)$ in ihre $x-$ und $y-$ Komponenten (Parameterdarstellung) und bilden anschließend deren 1.Ableitung nach dem Parameter φ.

$$x(\varphi) = r(\varphi) \cdot \cos(\varphi), \qquad y(\varphi) = r(\varphi) \cdot \sin(\varphi), \tag{5}$$

Extremstellen der Funktion $x(\varphi)$

$$\dot{x}(\varphi) = \sin[\varphi](4b\cos[\varphi]^3 + a\sin[3\varphi]) \tag{6}$$

Die transzendente Gleichung wird numerisch gelöst, wobei uns die Nullstellen im Intervall $0 \le \varphi \le \pi$ interessieren.

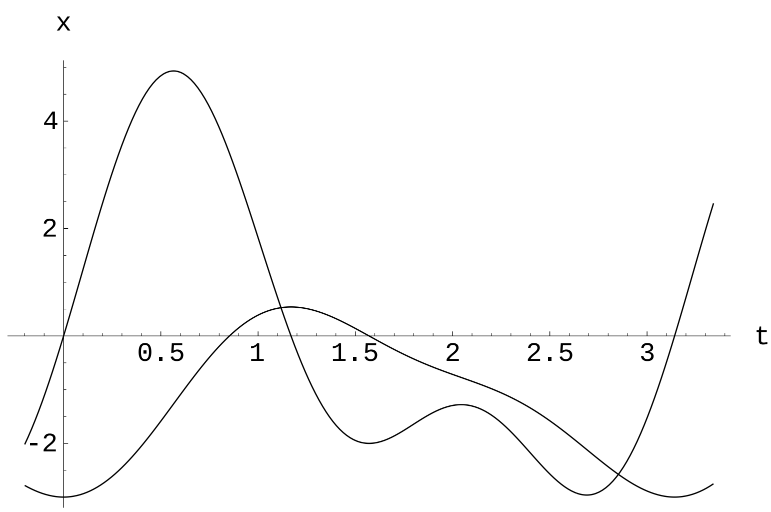

Abbildung 2: Verlauf der Funktion $x(\varphi)$ und der 1. Ableitung $\dot{x}(\varphi)$

Als reelle Nullstellen ergeben sich:

$$\varphi_{01} = 0, \qquad \varphi_{02} = 1.16929 \tag{7}$$

Setzen wir diese Werte in die Funktion $x(\varphi)$ ein, erhalten wir als Extremwerte:

$$x(\varphi_{01}) = -3, \qquad x(\varphi_{02}) = 0.5396 \tag{8}$$

Damit besitzt die Funktion $x(\varphi)$ an der Stelle $\varphi_{01} = 0$ ein lokales Minimum und an der Stelle $\varphi_{02} = 1.16929$ ein lokales Maximum.

Extremstellen der Funktion $y(\varphi)$

$$\dot{y}(\varphi) = -\cos[\varphi](b\cos[3\varphi] - 4a\sin[\varphi]^3) \tag{9}$$

Die transzendente Gleichung wird numerisch gelöst, wobei uns die Nullstellen im Intervall $0 \leq \varphi \leq \pi$ interessieren.

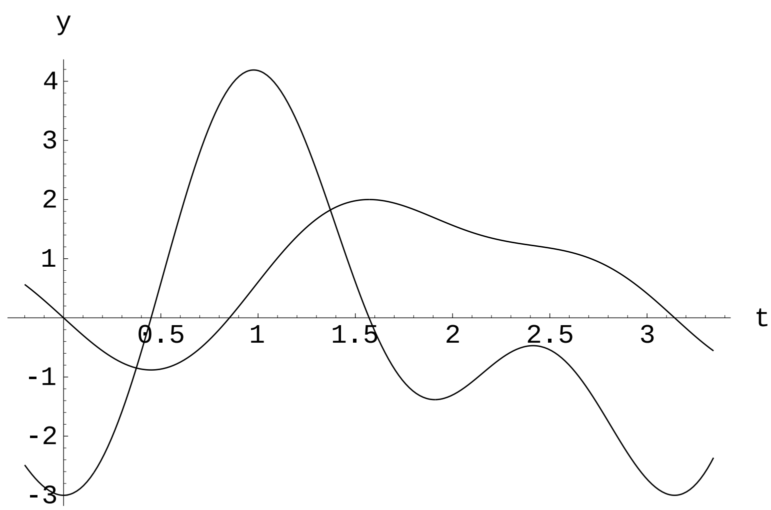

Abbildung 3: Verlauf der Funktion $y(\varphi)$ und der 1. Ableitung $\dot{y}(\varphi)$

Als reelle Nullstellen ergeben sich:

$$\varphi_{03} = 0.449897, \qquad \varphi_{04} = \frac{\pi}{2} \tag{10}$$

Setzen wir diese Werte in die Funktion $y(\varphi)$ ein, erhalten wir als Extremwerte:

$$y(\varphi_{03}) = -0.8811, \qquad y(\varphi_{04}) = 2 \tag{11}$$

Damit besitzt die Funktion $y(\varphi)$ an der Stelle $\varphi_{03} = 0.449897$ ein lokales Minimum und an der Stelle $\varphi_{04} = \frac{\pi}{2}$ ein lokales Maximum.

Von der Kurve eingeschlossener Flächeninhalt

Für Kurven in Polarkoordinaten benutzen wir die Leibnizsche Sektorenformel:

$$A = \frac{1}{2} \cdot \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2 \cdot d\varphi = \frac{1}{2} \cdot \int\limits_{0}^{\pi} \left[a \cdot \sin^3(\varphi) - b \cdot \cos^3(\varphi)\right]^2 \cdot d\varphi \tag{12}$$

$$A = \frac{1}{2}\Big(\frac{5a^2\pi}{16} + \frac{5b^2\pi}{16}\Big) \tag{13}$$

Mit $a = 2$ und $b = 3$ folgt:

$$A = \frac{65\pi}{32} = 6.38136\,FE \tag{14}$$

Berechnung des Flächenschwerpunktes

Die Koordinaten für den Flächenschwerpunkt ergeben sich aus den folgenden Quotienten:

$$x_s = \frac{\frac{1}{3} \cdot \int\limits_0^\pi r^3 \cdot \cos(\varphi) \cdot d\varphi}{\frac{1}{2} \cdot \int\limits_0^\pi r^2 \cdot d\varphi}, \qquad y_s = \frac{\frac{1}{3} \cdot \int\limits_0^\pi r^3 \cdot \sin(\varphi) \cdot d\varphi}{\frac{1}{2} \cdot \int\limits_0^\pi r^2 \cdot d\varphi} \tag{15}$$

Die Nennerfunktion entspricht dem umrandeten Flächeninhalt A. Für die Zählerfunktionen erhalten wir:

$$A_x = \frac{1}{3}\Big(-\frac{9}{256}a^2 b\pi - \frac{63b^3\pi}{256}\Big) \tag{16}$$

$$A_y = \frac{1}{3}\Big(\frac{63a^3\pi}{256} + \frac{9}{256}ab^2\pi\Big) \tag{17}$$

Als Flächenschwerpunkt ergibt sich:

$$x_s = \frac{A_x}{A} = -\frac{3b(a^2+7b^2)}{40(a^2+b^2)} = -\frac{603}{520} = -1.15962 \tag{18}$$

$$y_s = \frac{A_y}{A} = \frac{3a(7a^2+b^2)}{40(a^2+b^2)} = \frac{111}{260} = 0.426923 \tag{19}$$

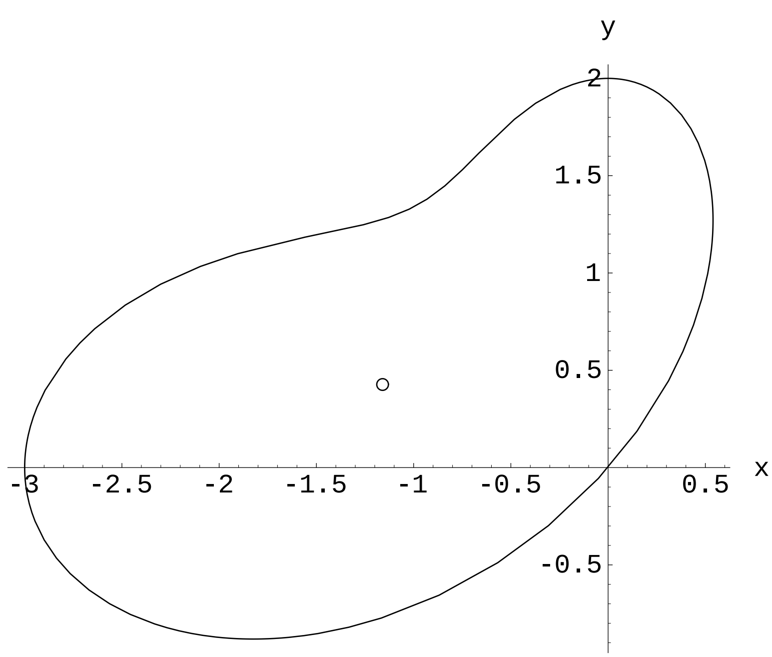

Abbildung 4: Eikurve mit eingezeichneten Schwerpunkt

Kurvenlänge

Das Bogendifferential ds lautet für Kurven in Polarkoordinaten :

$$ds = \sqrt{r^2 + \dot{r}^2} \cdot d\varphi \quad \rightarrow \quad s = \int\limits_0^\pi \sqrt{r^2 + \dot{r}^2} \cdot d\varphi \tag{20}$$

$$r(\varphi) = a \cdot \sin^3(\varphi) - b \cdot \cos^3(\varphi) \tag{21}$$

$$\dot{r}(\varphi) = \frac{3}{2}(b\cos[\varphi] + a\sin[\varphi])\sin[2\varphi] \tag{22}$$

$$ds = \sqrt{\left(b\text{cos}[\varphi]^3 - a\text{sin}[\varphi]^3\right)^2 + \frac{9}{4}(b\cos[\varphi] + a\sin[\varphi])^2 \text{sin}[2\varphi]^2} \tag{23}$$

Eine geschlossene Lösung ist für den relativ komplizierten Integranten nicht mehr möglich. Als numerische Näherung erhält man:

$$s = \int\limits_0^\pi \sqrt{r^2 + \dot{r}^2} \cdot d\varphi = 9.96609 \tag{24}$$