

Das Kirchenfenster

aus *Jagt auf Zahlen und Figuren*

10. September 2006

Einem quadratischen Kirchenfenster der Seitenlänge a sind 4 Viertelkreisbögen eingeschrieben (Abbildung 1). Berechne den Flächeninhalt der farbig markierten Schnittfigur im Inneren der vier Kreisbögen in Abhängigkeit von a .

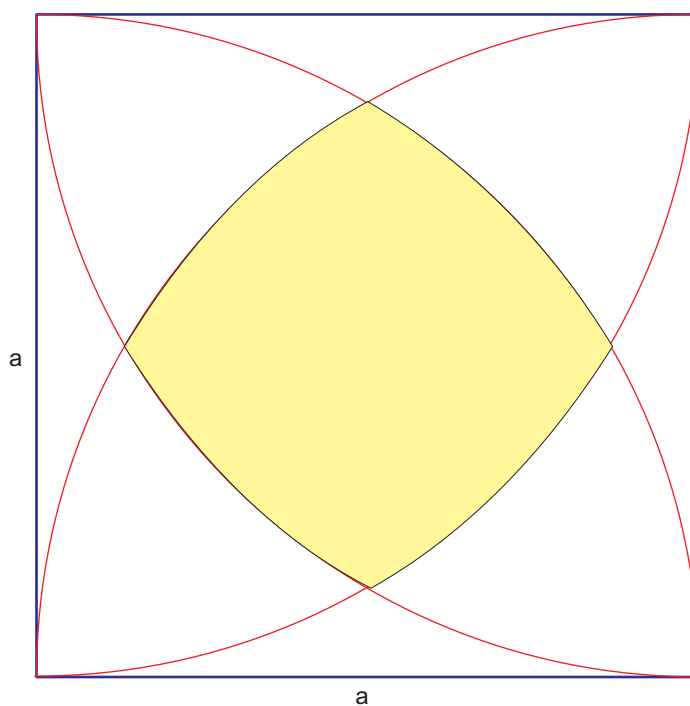


Abbildung 1: Skizze zum Kirchenfenster

Lösungsvorschlag

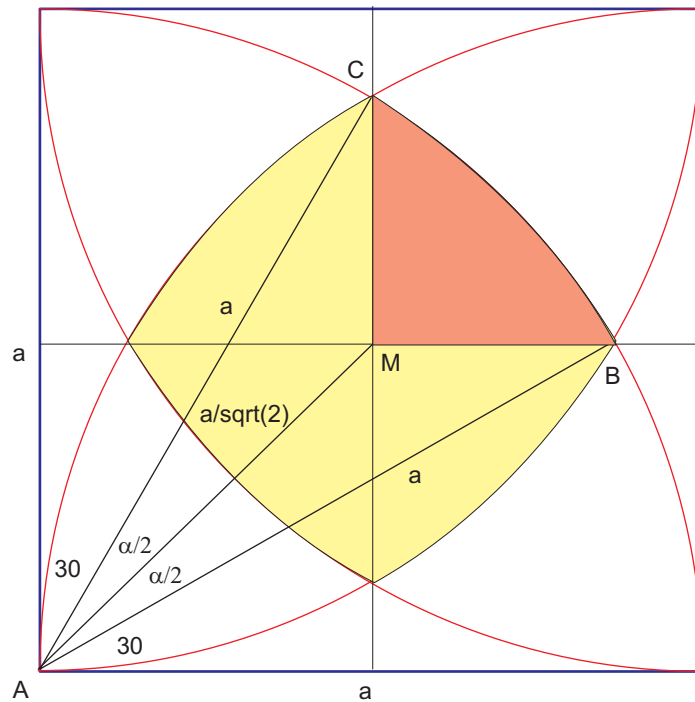


Abbildung 2: Skizze zum Lösungsweg

Wir betrachten das Kreissegment ABC mit der Kantenlänge $\overline{AB} = \overline{AC} = a$. Der Öffnungswinkel beträgt 30° , d.h. es ist $\alpha/2 = 15^\circ$. Der Flächeninhalt vom Kreissegment mit dem Öffnungswinkel von 30° berechnet sich zu:

$$A_k = \frac{a^2 \cdot \alpha}{2} = \frac{a^2 \cdot \pi}{12} \quad (1)$$

Der Flächeninhalt der Dreiecke AMC bzw. AMB berechnet sich aus:

$$A_d = \frac{a^2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(15^\circ)}{4} \quad (2)$$

Ein Viertel der Schnittfigur erhalten wir aus der Differenz des Kreissegments minus der Flächeninhalte der Dreiecke AMC und AMB .

$$\frac{A}{4} = A_k - 2 \cdot A_d = \frac{a^2 \cdot \pi}{12} - \frac{a^2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(15^\circ)}{2} \quad (3)$$

Damit ergibt sich der gesamte Flächeninhalt der Schnittfigur zu:

$$A = \frac{a^2 \cdot \pi}{3} - a^2 \cdot 2 \sqrt{2} \cdot \sin(15^\circ) = a^2 \left(1 - \sqrt{3} + \frac{\pi}{3} \right) \approx 0.315147 a^2 \quad (4)$$