Ein *verwickeltes* Problem

Ingmar Rubin, Berlin

30. Dezember 2006

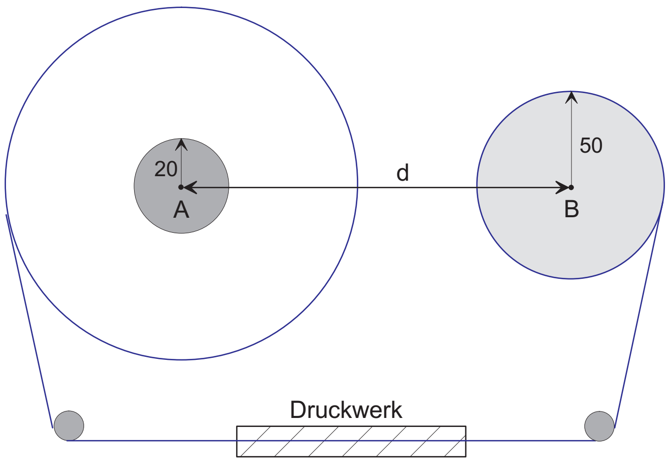

Abbildung 1: Papierwickelvorrichtung

In einer Fabrik wird Geschenkpapier mit Weihnachtsmotiven bedruckt. Das unbedruckte Papier befindet sich auf der Rolle A mit einen Innenradius von $r_a = 20\,mm$. Das bedruckte Papier wird fortlaufend auf Rolle B gewickelt mit einem Anfangsradius von $r_b = 50\,mm$. Auf Rolle A befindet sich zu Beginn $300\,m$ Papier mit einer Stärke von $h = 1/10\,mm$. Welchen Abstand $d = \overline{AB}$ müssen die Mittelpunkte der Rollen mindestens haben, damit es während der Verarbeitung keine Probleme gibt?

Lösungsweg

Das Papier ist in Form einer *archimedischen Spirale* auf den Rollen gewickelt. Der Radius steigt dabei nicht proportional zur Länge des aufgewickelten Papiers. Betrachtet man die Summe beider Wickelradien während das Papier von A nach B transportiert wird, so gibt es zwischenzeitlich ein Maximum. Ziel der folgenden Rechnung ist es dieses Maximum zu bestimmen.
In Polarkoordinaten lautet die Gleichung der Spirale:

$$r(\alpha) = a \cdot \alpha \quad \rightarrow \quad \alpha = \frac{r}{a} \tag{1}$$

Darin ist ist a der Anstieg je Umdrehung. In unserem Fall ist

$$a = \frac{h}{2\,\pi} \tag{2}$$

worin h die Materialstärke des Papiers ist. Die Länge des aufgewickelten Papiers berechnet sich aus dem Integral:

$$L = \int\limits_{\alpha_0}^{\alpha} \sqrt{r^2 + \dot{r}^2}\, d\alpha = \frac{a}{2}\left(\alpha\sqrt{\alpha^2+1} + \operatorname{arsinh}(\alpha)\right) \tag{3}$$

Für große Winkel α (mehrere Umdrehungen) genügt als Nährung:

$$L = \frac{a}{2}\,\alpha^2 \tag{4}$$

An Stelle von α setzen wir den Ausdruck aus (1) und erhalten die Länge in Abhängigkeit vom Radius:

$$L_A = \frac{{r_1}^2 - {r_a}^2}{2\,a}, \quad L_B = \frac{{r_2}^2 - {r_b}^2}{2\,a} \tag{5}$$

Die Summe der beiden Längen muß nun stets der Anfangslänge von Rolle A entsprechen:

$$L_0 = L_A + L_B = \frac{{r_1}^2 - {r_a}^2}{2\,a} + \frac{{r_2}^2 - {r_b}^2}{2\,a} \tag{6}$$

Diese Gleichung Lösen wir nach r_2 auf und erhalten:

$$r_2 = \sqrt{2\,a\,L - {r_1}^2 + {r_a}^2 + {r_b}^2} \tag{7}$$

Jetz bilden wir die Summe aus beiden Radien:

$$f = r_1 + r_2 = r_1 + \sqrt{2\,a\,L - {r_1}^2 + {r_a}^2 + {r_b}^2} \tag{8}$$

und ermitteln davon das Maximum:

$$\frac{d\,f}{d\,r_1} = 1 - \frac{r_1}{\sqrt{2\,a\,L - {r_1}^2 + {r_a}^2 + {r_b}^2}} = 0 \tag{9}$$

$$r_1 = \frac{\sqrt{2\,a\,L + {r_a}^2 + {r_b}^2}}{\sqrt{2}} \tag{10}$$

Mit $h = 1/10\,mm$ und $L_0 = 300\,m$ erhalten wir folgende Grafik:

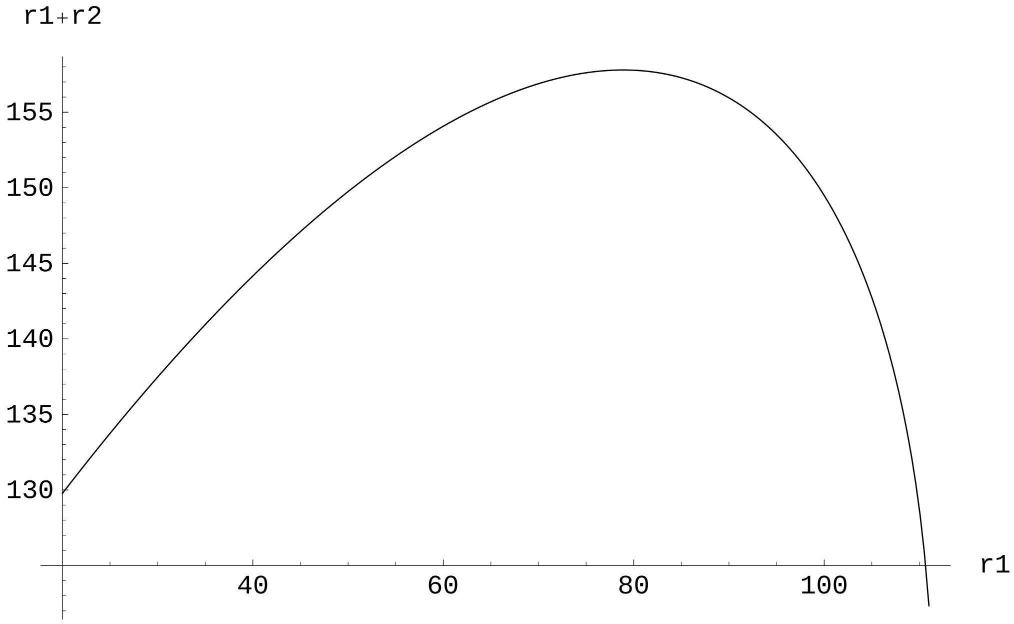

Abbildung 2: Das Maximum wird bei $r_1 \approx 78.8964\,mm$ erreicht

Für r_2 erhalten wir dann den Wert:

$$r_2(r_1 = 78.8964) = \sqrt{2\,a\,L - {r_1}^2 + {r_a}^2 + {r_b}^2} = 78.8964 \tag{11}$$

d.h. wenn beide Radien gleich groß sind, wird das Maximum erreicht. Dabei befindet sich auf der Rolle A eine Länge von $L_A = 182.987\,m$ und auf der Rolle B befinden sich $L_B = 117.013\,m$ Papier. Die Entfernung $d = \overline{AB}$ muß mindestens

$$d = r_1 + r_2 = 2 \cdot r_1 = 2 \cdot 78.8964 = 157.793\,mm \tag{12}$$

betragen.