Zwei gleichseitige Dreiecke im Rechteck

Peter G. Nischke, Berlin

27. Juni 2005

Gegeben sei das Rechteck $ABCD$ mit der Grundseite $AB = 2\,a$. Dem Rechteck sind zwei gleichseitige Dreiecke AEF und EBG einbeschrieben, wie in Abbildung 1 gezeigt. Die Diagonale BD schneidet die Dreieckseiten in den Punkten M, N, P. Berechne die Länge der eingezeichneten Strecken w, x, y, z in Abhängigkeit von $AE = EB = a$.

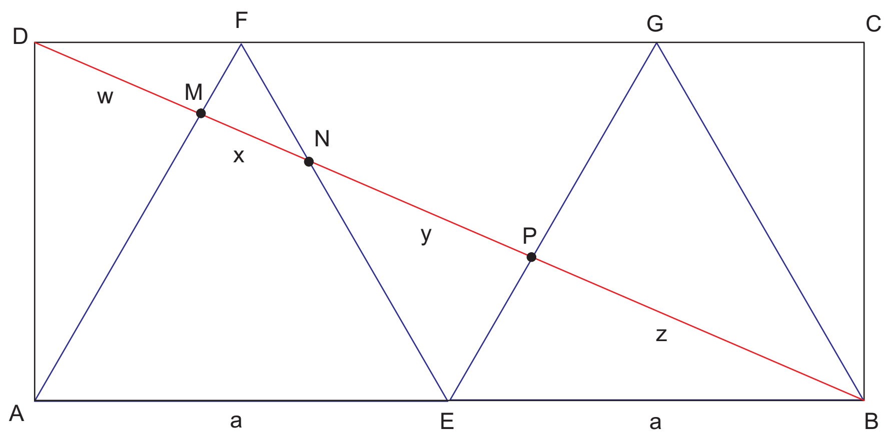

Abbildung 1: Skizze zur Aufgabenstellung

Lösungsvorschlag

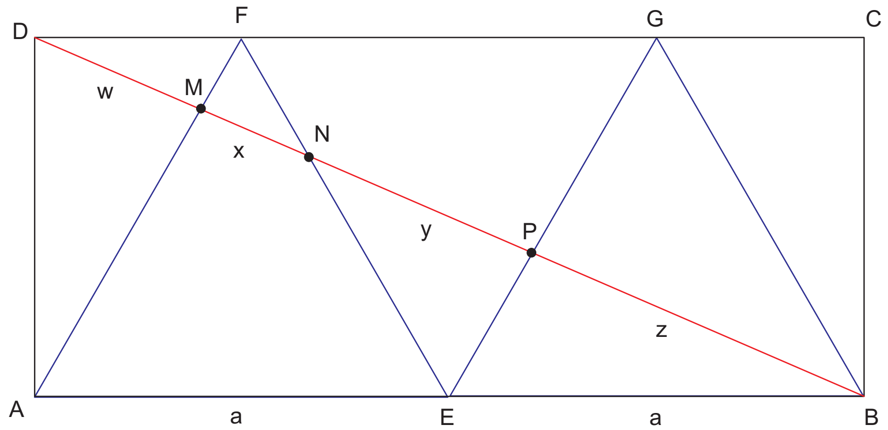

Abbildung 2: Skizze zum Lösungsweg

Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke lassen sich Verhältnisgleichungen aufstellen:

$$\triangle BEP \approx \triangle BAM \quad \frac{z}{a} = \frac{z+y+x}{2\,a} \quad \rightarrow \quad z = x + y \tag{1}$$

$$\triangle DMF \approx \triangle DPG \quad \frac{2\,w}{a} = \frac{2\,(w+x+y)}{3\,a} \quad \rightarrow \quad 2\,w = x + y \tag{2}$$

$$\triangle DNF \approx \triangle DBG \quad \frac{2\,(w+x)}{a} = \frac{2\,(w+x+y+z)}{3\,a} \quad \rightarrow \quad 2\,(w+x) = y + z \tag{3}$$

Aus dem Vergleich von (1) mit (2) folgt:

$$z = 2\,w \tag{4}$$

Das Ergebnis setzen wir in (3) ein und erhalten:

$$2\,(w+x) = y + z = y + 2\,w \quad \rightarrow \quad y = 2\,x \tag{5}$$

Vergleich mit (1) liefert:

$$z = x + y = x + 2\,x \quad \rightarrow \quad z = 3\,x \tag{6}$$

Vergleich mit (4) liefert:

$$z = 2\,w = 3\,x \quad \rightarrow \quad w = \frac{3\,x}{2} \tag{7}$$

Die Länge der Diagonale BD berechnet sich aus dem Pythagoras:

$$BD = w + x + y + z = \sqrt{4\,a^2 + \frac{3\,a^2}{4}} = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{19} \tag{8}$$

$$BD = \frac{3\,x}{2} + x + 2\,x + 3\,x = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{19} \quad \rightarrow \quad x = \frac{\sqrt{19}}{15} \cdot a \approx 0.290593\,a \tag{9}$$