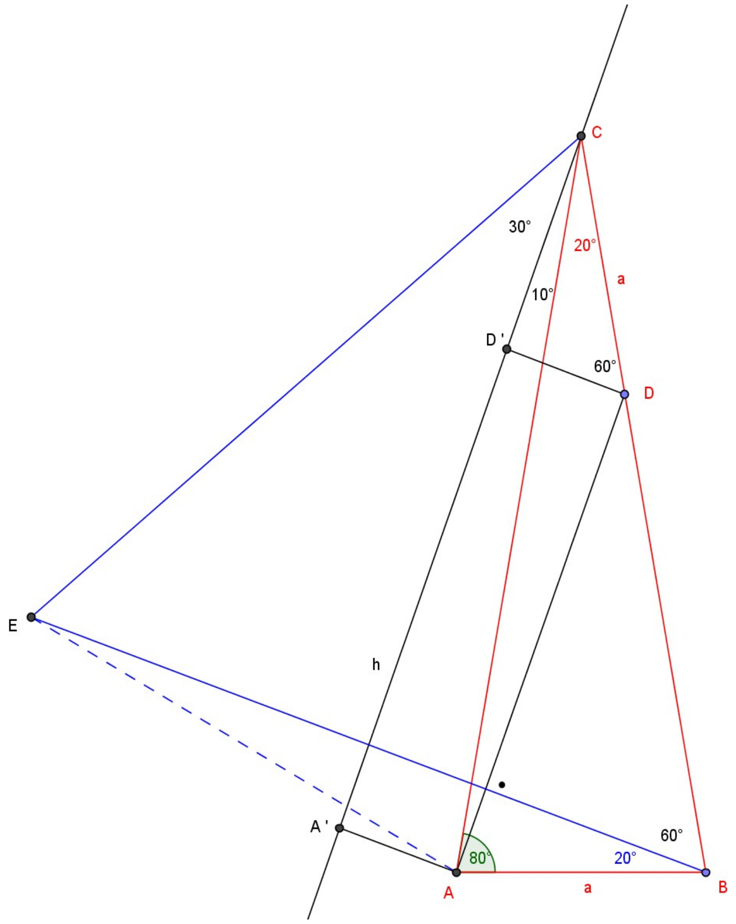
Ein Winkel im gleichschenkligen Dreieck ABC
(siehe Zeichnung)

Lösungsvorschlag von Wolfgang Kirschenhofer, Herzogenburg

Gegeben sei das gleichschenklige Dreieck ABC mit Basislänge a:=[AB] und <)ACB = 20°.
Weiters sei auf CB der Punkt D mit [CD]= a gegeben.
Behauptung : <)ADB = 30°



Wir geben für die Behauptung zwei Beweise an.

1.Beweis:

Wir zeichnen das gleichseitige Dreieck BCE mit [CE]=[BE]=[BC]. Es ist dann <)EBA= 20° und die beiden Dreiecke ABE und DCA sind kongruent. Sei h die Trägergerade der Höhe zu EB im gleichseitigen Dreieck BCE. Es gilt dann <)(h,CA) = 10°. Sei nun A' die Normalprojektion von A auf h. Da nun <)A'CA = 10° und CA ein Schenkel des Dreiecks ABC ist, gilt [A'A] = $\frac{a}{2}$.
Ebenso sei D' die Normalprojektion von D auf h. Da nun <)D'DC = 60° und [DC]= a ist, gilt auch [DD']= $\frac{a}{2}$. Die Strecke DA ist daher parallel zu h und daher **<)ADB= <)D'CD= 30°.**

2.Beweis:

Wir verwenden zweimal den Sinussatz und die strenge Monotonie der Funktion

$$f(x) := \frac{\sin(x)}{\sin(x - \frac{\pi}{9})}$$

Siehe Zeichnung:
Wir schreiben b:= [AC]=[BC] und x:= <)ADB mit 20° < x < 100° . Gesucht ist Winkel x .

Im Dreieck ABC gilt: $$\frac{a}{\sin(20°)} = \frac{b}{\sin(80°)} \qquad (1)$$

Im Dreieck ADC gilt: $$\frac{b}{\sin(180-x)} = \frac{a}{\sin(x-20°)} \qquad (2)$$

Aus (1) und (2) folgt:

$$\frac{\sin(20°)}{\sin(x-20°)} = \frac{\sin(80°)}{\sin(180-x)} \Rightarrow \frac{\sin(x)}{\sin(x-20°)} = \frac{\sin(80°)}{\sin(20°)} = \frac{\cos(10°)}{2 \cdot \sin(10°) \cdot \cos(10°)} \Rightarrow$$

$$\frac{\sin(x)}{\sin(x-20°)} = \frac{\frac{1}{2}}{\sin(10°)} \qquad (3)$$

Durch Einsetzen sieht man sofort, daß $x = 30°$ eine Lösung von Gleichung (3) ist.
Wir müssen jetzt nur noch zeigen, daß dies die einzige Lösung ist.
Dazu schreiben wir alle Winkel im Bogenmaß und betrachten die Funktion

$$f(x) := \frac{\sin(x)}{\sin(x - \pi/9)}$$

Die erste Ableitung von f(x) ist zwischen ihren Polen stets < 0 .
f(x) ist daher jedenfalls im Intervall $\frac{\pi}{9} < x < \frac{5 \cdot \pi}{9}$ streng monoton fallend und daher ist $x = \frac{\pi}{6} = 30°$ die einzige Lösung der Gleichung (3) in diesem Intervall.