Winkel im Dreieck gesucht

Eine Aufgabe von Rainer Rosenthal

aus Newsgroup *de.sci.mathematik*

Vorgelegt sei das gleichschenklige Dreieck ABC von dem nur der Winkel $\sphericalangle ACB = 20°$ bekannt ist. Auf der Seite $\overline{BC}$ befindet sich der Punkt D in der Entfernung $\overline{CD} = \overline{AB}$. Berechne aus diesen Angaben den Winkel $\sphericalangle ADB$ (Punktezahl=8).

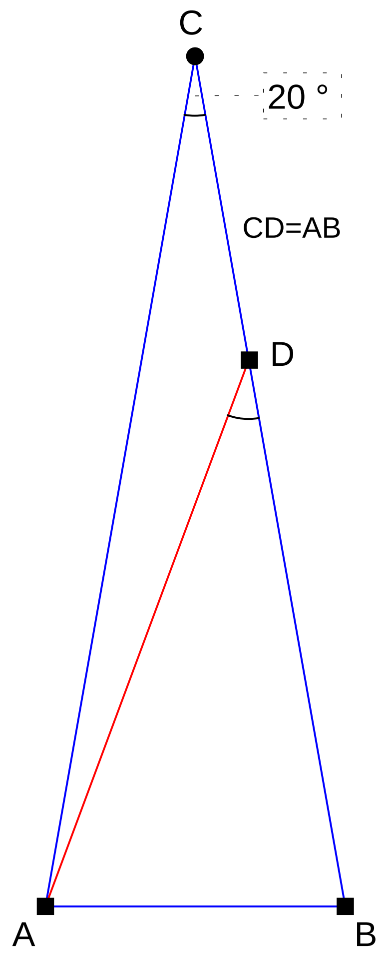

Abbildung 1: Skizze zur Aufgabenstellung

Lösungsvorschlag 1 über das regelmäßige 9-Eck

von Rainer Rosenthal

Wir zeichnen ein reguläres $9-Eck$ mit dem Zentrum M und den Ecken E_1 bis E_9. Das Dreieck ABC aus der Aufgabe wird nun in das Neuneck eingebettet, so das $A = E_1$, $B = E_2$ und $C = E_6$ gilt. Wegen $\overline{AB} = \overline{E_1E_2} = \overline{E_5E_6}$ und

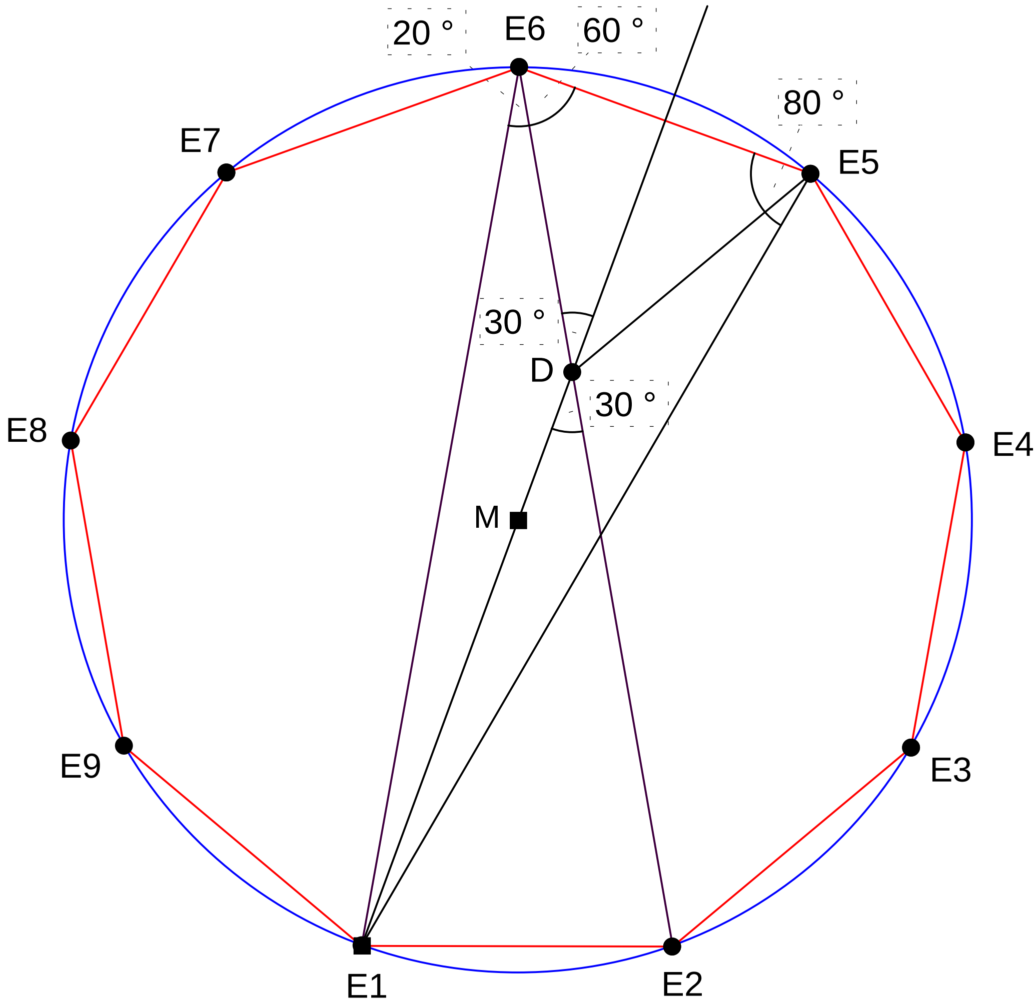

Abbildung 2: Skizze zur Originallösung

$\overline{E_6D} = \overline{E_6E_5}$ ist $\triangle DE_6E_5$ gleichschenklig. Der Winkel $\sphericalangle DE_6E_5$ berechnet sich aus der Differenz:

$$\sphericalangle E_1E_6E_5 - \sphericalangle E_1E_6E_2 = 80^\circ - 20^\circ = 60^\circ \tag{1}$$

Damit ist das $\triangle DE_6E_5$ ein gleichseitiges Dreieck, bei dem alle drei Innenwinkel identisch 60° betragen. Aus Symmetriegründen halbiert die Gerade durch $\overline{E_1D}$ den $\sphericalangle E_6DE_5$. Damit ist der gesuchte Winkel $\sphericalangle E_1DE_2$ Wechselwinkel zu einem 30° Winkel, also selbst gleich 30°.

Lösungsvorschlag 2 über Zentriwinkelsatz

Ein zweite Möglichkeit, den gesuchten Winkel zu bestimmen, nutzt den Zentriwinkelsatz im Kreis. Dazu wird Abbildung 2 um die Strecken $\overline{E_1M}$ und $\overline{E_2M}$ ergänzt (Abbildung 3). Der Zentriwinkel über der Kreissehne $\overline{E_1E_2}$ ist stets

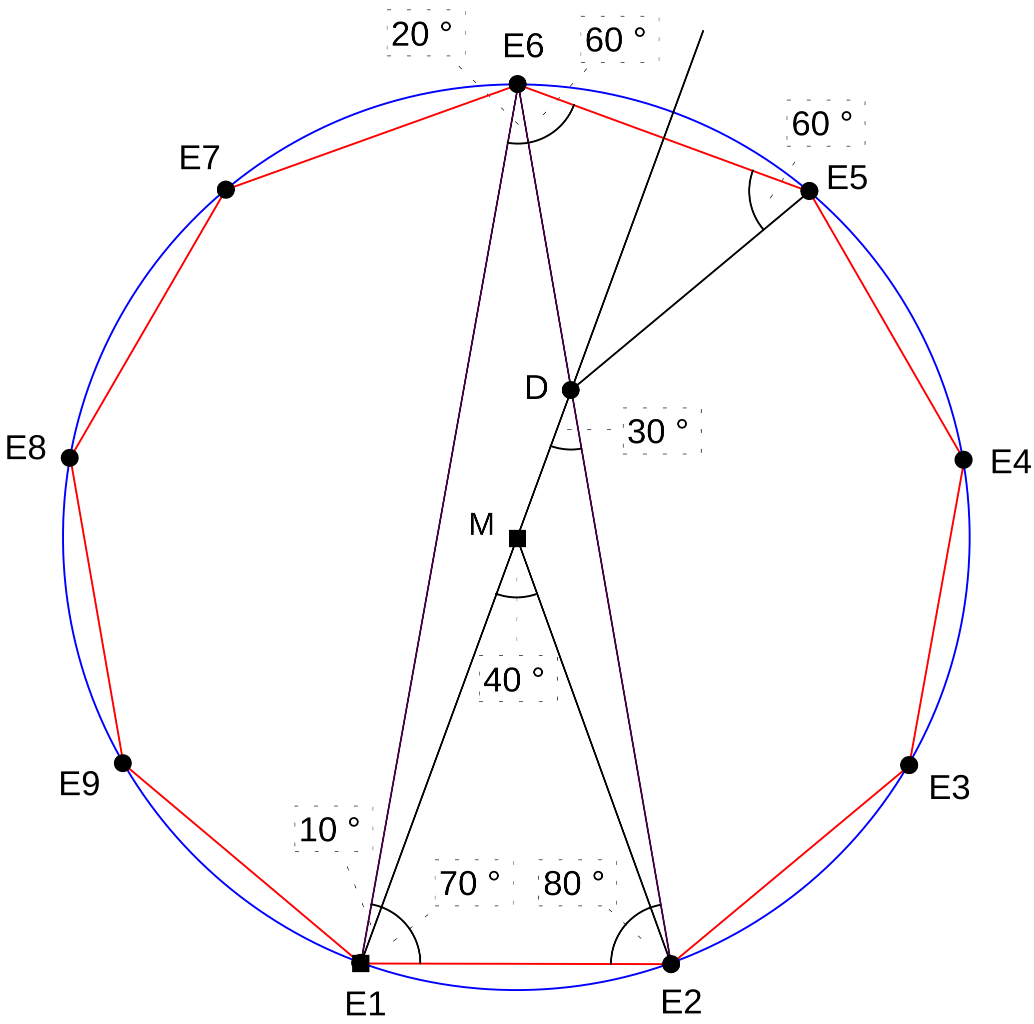

Abbildung 3: Zentriwinkel $\sphericalangle E_1ME_2$ über der Sehne $\overline{E_1E_2}$

doppelt so groß wie der der zugehörige Peripheriewinkel über der gleichen Sehne.

$$\sphericalangle E_1ME_2 = 2 \cdot \sphericalangle E_1E_6E_2 = 2 \cdot 20^\circ = 40^\circ \tag{2}$$

Die Basiswinkel im gleichseitigen Dreieck E_1ME_2 betragen : $(180^\circ - 40^\circ) \div 2 = 70^\circ$. Im Dreieck $E_1E_6E_2$ ist der Basiswinkel 80° groß. Aus Abbildung 2 wissen wir bereits, das die Gerade AD duch M verläuft. Nun ergibt sich der gesuchte Winkel im Dreieck E_1DE_2 aus :

$$\sphericalangle E_1DE_2 = 180^\circ - \sphericalangle E_2E_1D - \sphericalangle E_1E_2D = 180^\circ - 70^\circ - 80^\circ = 30^\circ \tag{3}$$

Lösungsvorschlag 3 über den Tangenssatz

von Peter Stratmann

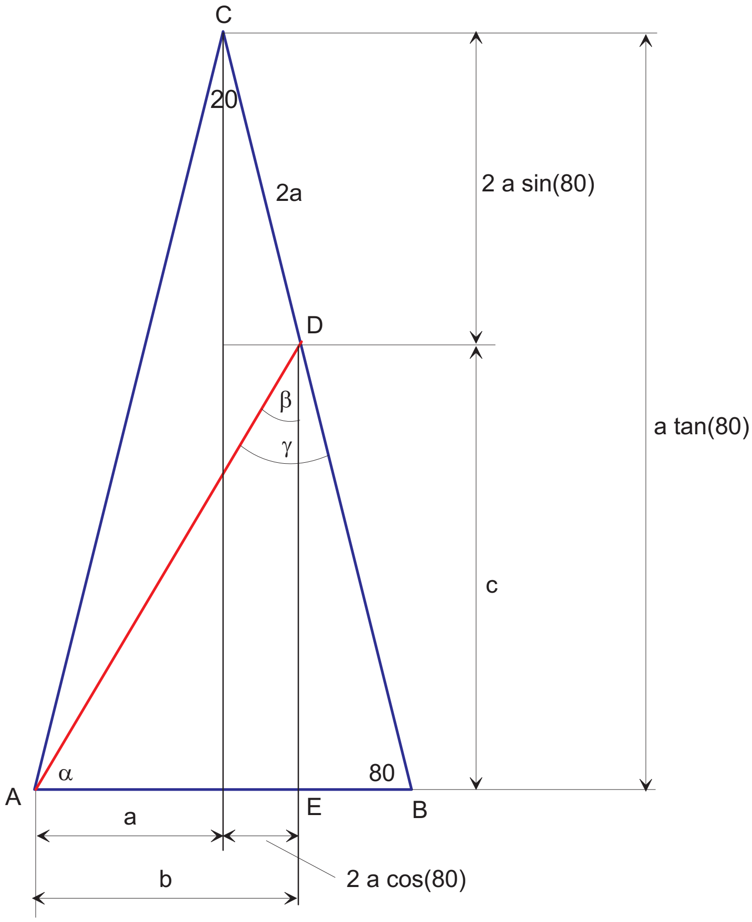

Abbildung 4: Skizze zur Lösung

Wir fällen vom Punkt C und Punkt D das Lot auf die Seite AB. Weiterhin seien die Winkel α, β und γ wie in Abbildung 4 eingeführt. Im rechtwinkligen Dreieck AED gilt der Tangenssatz:

$$\tan\alpha = \frac{c}{b} = \frac{a\,\tan 80^\circ - 2\,a\,\sin 80^\circ}{a + 2\,a\,\cos 80^\circ} = \frac{\tan 80^\circ - 2\,\sin 80^\circ}{1 + 2\,\cos 80^\circ} \approx 2.74747 \quad (4)$$

$$\rightarrow \quad \alpha = 70^\circ, \quad \beta = 90^\circ - \alpha = 20^\circ, \quad \gamma = 180^\circ - \alpha - 80^\circ = 30^\circ \quad (5)$$

Lösungsvorschlag 4 über den Kosinussatz

von Ingmar Rubin
Wer nicht auf die geniale Idee mit dem 9-Eck kommt, muß den *steinigen Weg* über die Gesetzmäßigkeiten im Dreieck gehen. Die Teilstrecken im Dreieck ABC seien gemäß Abbildung 5 benannt. Die Winkel werden wie folgt abgekürzt:

$$\alpha = \sphericalangle BAC, \quad \beta = \sphericalangle CBA, \quad \delta = \sphericalangle EDB, \quad \varepsilon = \sphericalangle AED$$

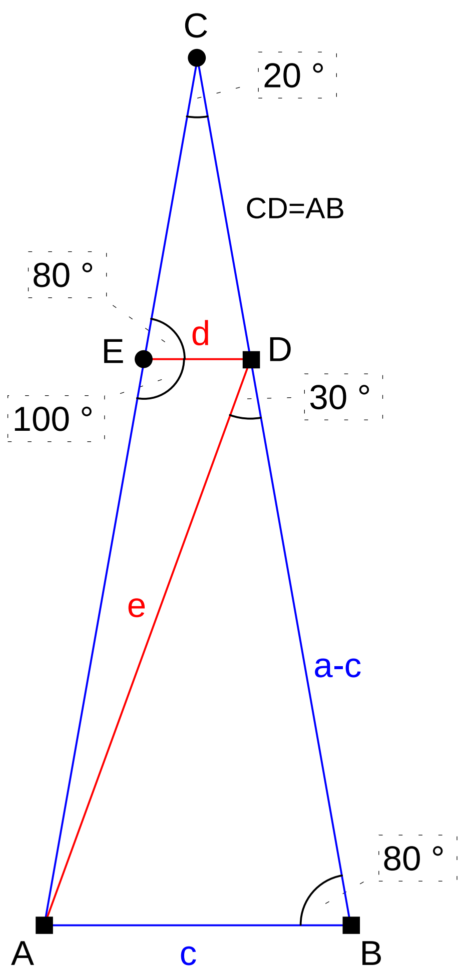

Abbildung 5: Skizze zur Lösung

Zunächst erkennt man, das im Viereck $ABDE$ die Summen der gegenüberliegenden Winkel 180° betragen. Diese Tatsache gilt übrigens für jedes gleichschenklige Dreieck !

$$\alpha = \beta = \frac{180^\circ - 20^\circ}{2} = 80^\circ, \qquad \delta = \epsilon = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ \tag{6}$$

Damit liegen die vier Punkte $ABDE$ auf einem Kreis (Sehnenviereck). Es gilt der *Satz des Ptolemäus*:

$$e^2 = (a-c)^2 + c \cdot d \tag{7}$$

Die Strecke $d = \overline{DE}$ folgt aus dem Strahlensatz:

$$\frac{c}{d} = \frac{a}{c} \quad \rightarrow \quad d = \frac{c^2}{a} \tag{8}$$

Damit beträgt die Länge der Transversalen $e = \overline{AD}$

$$e = \sqrt{(a-c)^2 + \frac{c^3}{a}} \tag{9}$$

Mit dem Cosinussatz im Dreieck ADB berechnet sich Winkel $\sphericalangle ADB = \omega$ zu :

$$c^2 = e^2 + (a-c)^2 - 2 \cdot e \cdot (a-c) \cdot \cos\omega \quad \rightarrow \quad \cos\omega = \frac{e^2 + (a-c)^2 - c^2}{2\,e\,(a-c)} \tag{10}$$

Mit e aus Gleichung (7) erhalten wir :

$$\cos\omega = \frac{2\,a^2 - 4ac + c^2 + \frac{c^3}{a}}{2\sqrt{(a-c)^2 + \frac{c^3}{a}}\,(a-c)} \tag{11}$$

Seite c kann aus dem Kosinussatz im $\triangle ABC$ berechnet werden:

$$c^2 = a^2 + a^2 - 2\,a^2\,\cos\gamma \quad \rightarrow \quad c = a\sqrt{2 - 2\,\cos\gamma}, \quad \gamma = 20^\circ \tag{12}$$

Nun wird c in Gleichung (9) ersetzt und soweit als möglich vereinfacht (Computeralgebrasystem zu Hilfe nehmen !):

$$\cos\omega = \frac{a\left(-2 + \cos[\gamma] + \sqrt{2 - 2\,\cos[\gamma]}\,(1 + \cos[\gamma])\right)}{a\left(-1 + \sqrt{2 - 2\,\cos[\gamma]}\right)\sqrt{\left(3 - 2\left(1 + \sqrt{2 - 2\,\cos[\gamma]}\right)\,\cos[\gamma]\right)}} \tag{13}$$

Man erkennt, das der Winkel ω unabhängig von a ist. Für $\gamma = 20^\circ = \frac{\pi}{9}$ erhält man schließlich:

$$\cos\omega = \frac{-\frac{3}{2} + \cos\left[\frac{\pi}{9}\right] + \sin\left[\frac{\pi}{18}\right]}{\left(-1 + 2\,\sin\left[\frac{\pi}{18}\right]\right)\sqrt{2 - 2\,\cos\left[\frac{\pi}{9}\right] + 2\,\sin\left[\frac{\pi}{18}\right]}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \rightarrow \quad \omega = 30^\circ \tag{14}$$