Ein Halbkreis im Trapez

Ingmar Rubin, Berlin

10. Juli 2006

In einem Trapez $ABCD$ sind die Seiten $a = \overline{AB}$ und $c = \overline{CD}$ gegeben. Gesucht ist die Länge der Seite $d = \overline{AD}$ unter der Bedingung, das ein Kreis k mit Mittelpunkt auf $\overline{AD}$ die Seiten a, b, c berühert.

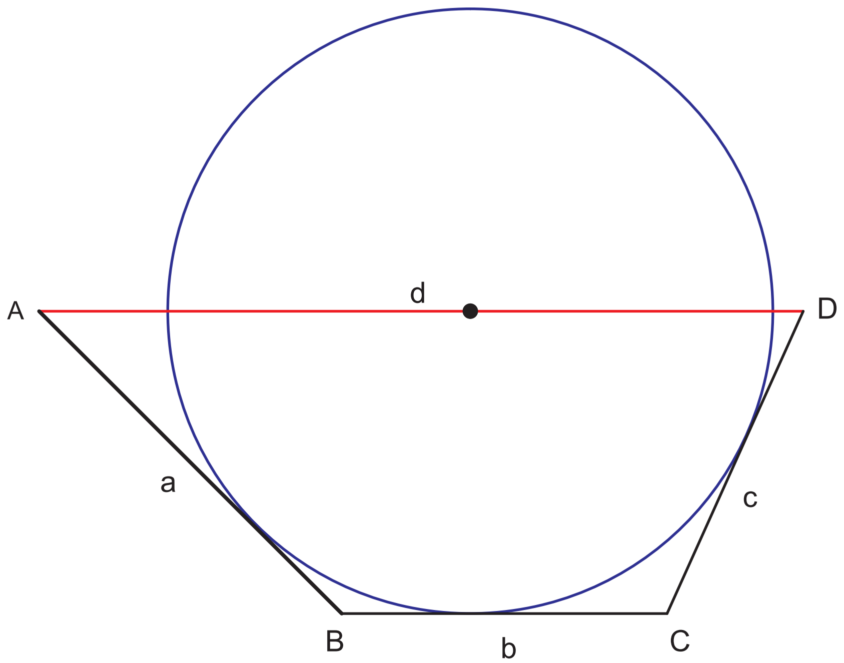

Abbildung 1: Bild zur Aufgabenstellung

Punktezahl=5

Lösungsvorschlag 1

von Ingmar Rubin

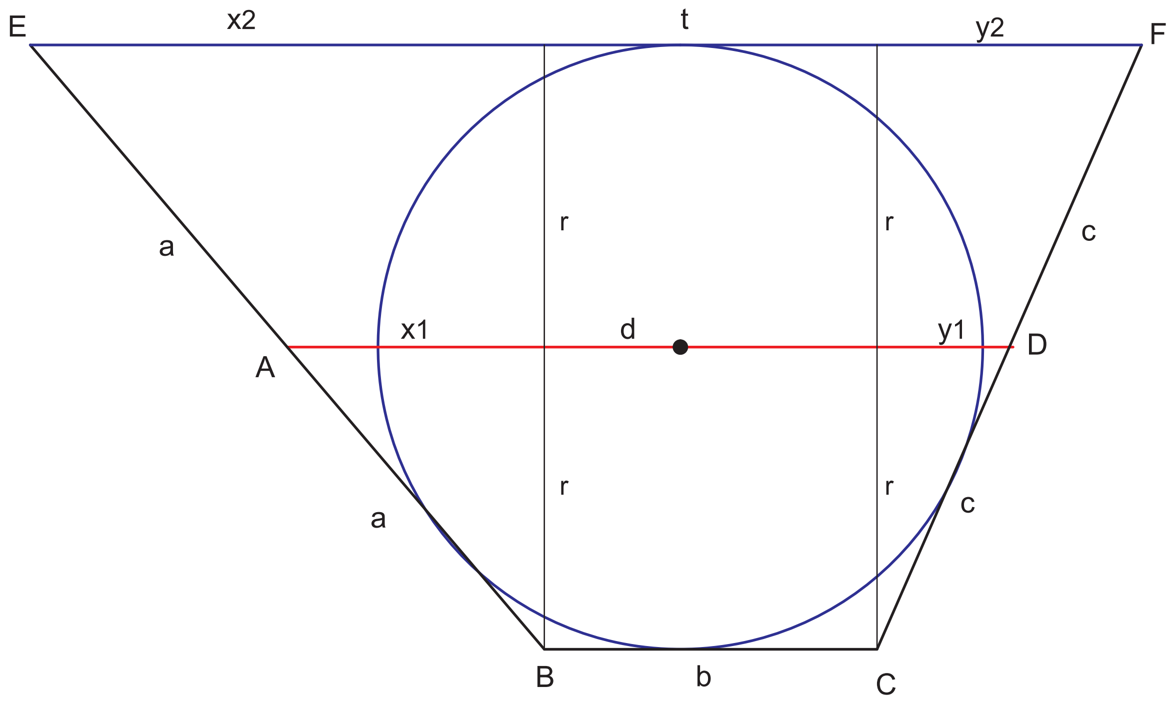

Abbildung 2: Skizze zum Lösungsweg 1

Wir zeichnen an den Kreis k die Tangente t parallel zu $d = \overline{AD}$. Die Seite $a = \overline{AB}$ wird über A hinaus verlängert bis zum Schnitt mit t. Der Schnittpunkt sei E. Die Seite $c = \overline{CD}$ wird über D hinaus verlängert bis zum Schnitt mit t. Der Schnittpunkt sei F.
In den Punkten B und C wird die Senkrechte zu $\overline{BC}$ errichtet. Die Teilstrecken auf $\overline{AD}$ bezeichnen wir mit x_1, y_1. Die Teilstrecken auf t werden mit x_2, y_2 benannt. Die gesuchte Strecke $d = \overline{AD}$ berechnet sich aus:

$$d = x_1 + b + y_1 \tag{1}$$

Aus dem Strahlensatz folgt:

$$\frac{x_1}{r} = \frac{x_2}{2\,r} \quad \rightarrow \quad x_2 = 2\,x_1 \tag{2}$$

$$\frac{x_1}{r} = \frac{y_2}{2\,r} \quad \rightarrow \quad y_2 = 2\,y_1 \tag{3}$$

Das Viereck $EBCF$ ist ein Tangentenviereck. Im Tangentenviereck gilt der Satz das die Summe der gegenüberliegenden Seiten gleich ist, also:

$$\square EBCF: \qquad 2\,a + 2\,c = b + t \quad \rightarrow \quad t = 2\,a + 2\,c - b \tag{4}$$

Die Seite t setzt sich zusammen aus:

$$t = b + x_2 + y_2 = b + 2\,x_1 + 2\,y_1 \tag{5}$$

Aus dem Vergleich mit (4) folgt:

$$t = b + 2\,x_1 + 2\,y_1 = 2\,a + 2\,c - b \quad \rightarrow \quad 2\,b + 2\,x_1 + 2\,y_1 = 2\,a + 2\,c \tag{6}$$

Gleichung (6) können wir auf beiden Seiten durch 2 teilen und erhalten das gesuchte Ergebnis - siehe auch Gleichung (1) :

$$d = b + x_1 + y_1 = a + c \tag{7}$$

Die gesuchte Strecke $d = \overline{AD}$ ergibt sich als Summe aus den Seiten a und c.

Lösungsvorschlag 2

von Andreas Grieser und Reinhold Moebs

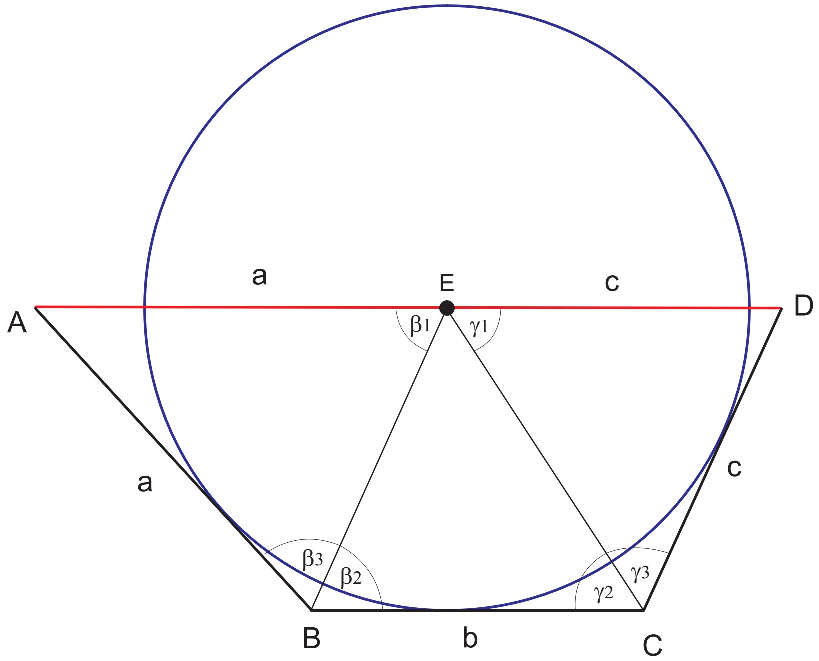

Abbildung 3: Skizze zum Lösungsweg 2

In dieser Lösung sehen wir, daß es auch auf rein geometrischen Weg geht. Damit der Kreis die Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{BC}$ berühert, liegt sein Mittelpunkt E auf der Winkelhalbierenden des Winkels β (Abbildung 3). Also ist $\beta_2 = \beta_3$. Da β_1 und β_2 Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen sind, sind sie ebenfalls gleich groß. Das Dreieck AEB ist damit ein gleichschenkliges Dreieck und es folgt aus:

$$\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 \quad \rightarrow \quad \overline{AB} = \overline{AE} = a \tag{1}$$

Die gleiche Überlegung trifft für die Strecke $\overline{CE}$ als Winkelhalbierende im Punkt C zu.

$$\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 \quad \rightarrow \quad \overline{DC} = \overline{DE} = c \tag{2}$$

Die gesuchte Strecke $d = \overline{AD}$ beträgt demnach :

$$d = \overline{AD} = a + c \tag{3}$$

Lösungsvorschlag 3

von Peter Stratmann

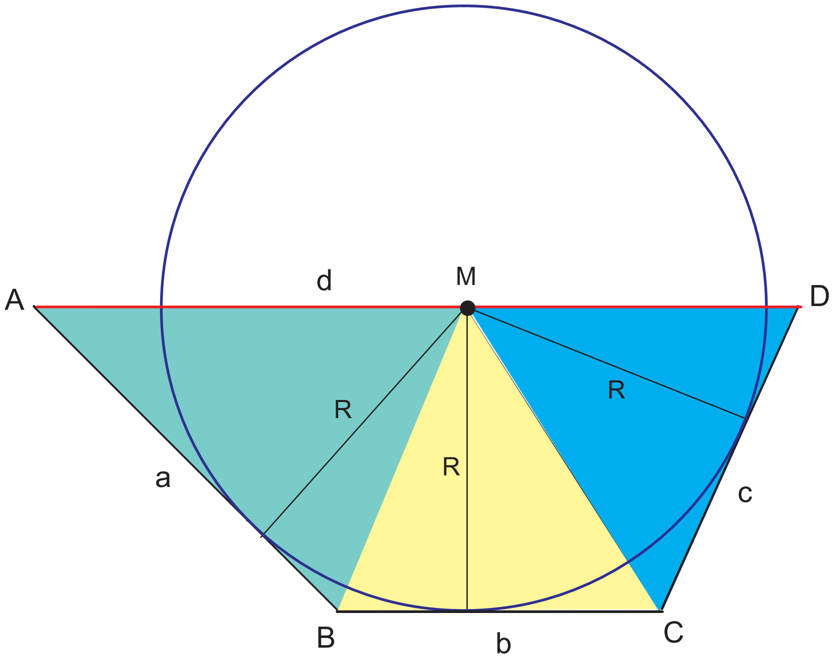

Abbildung 4: Skizze zum Lösungsvorschlag 3

Wir zerlegen das Trapez in die Dreiecke AMB, BMC und CMD, wie in Abbildung 4 gezeigt. Die Höhen in jeden der Dreiecke ist der Radius R des einbeschriebenen Kreises. Der Flächeninhalt eines Dreiecks errechnet sich aus dem Produkt *Grundseite mal Höhe geteilt durch 2*. Die Summe der Dreiecksflächeninhalte vergleichen wir mit der Fächenformel vom Trapez.

$$F = \frac{1}{2}\,a\,R + \frac{1}{2}\,b\,R + \frac{1}{2}\,c\,R = \frac{b+d}{2}\,R \tag{1}$$

Da $R > 0$ ist können wir auf beiden Seiten R kürzen:

$$a + b + c = b + d \quad \rightarrow \quad a + c = d \tag{2}$$