Die geteilte Geburtstagstorte

Eine Rätselaufgabe von Peter G.Nischke Berlin

3. Januar 2002

Karl feiert mit seinen Brüdern Paul und Erich seinen 15. Geburtstag. Die Geburtstagstorte hat die Form eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seitenlänge a. Karl als das Geburtstagskind soll je zwei Stückchen mit 1/3 der Tortenfläche bekommen. Paul, als der Jüngste, soll 1/9 und Erich 2/9 von der Torte erhalten.

Karl überlegt wie man die Torte zerteilen kann. Wenn man in Gedanken die obere Spitze vom Dreieck so nach unten klappt, das der Punkt $C = C'$ auf der Grundlinie $\overline{AB}$ liegt, erhält man das Schnittmuster nach Abbildung 1.

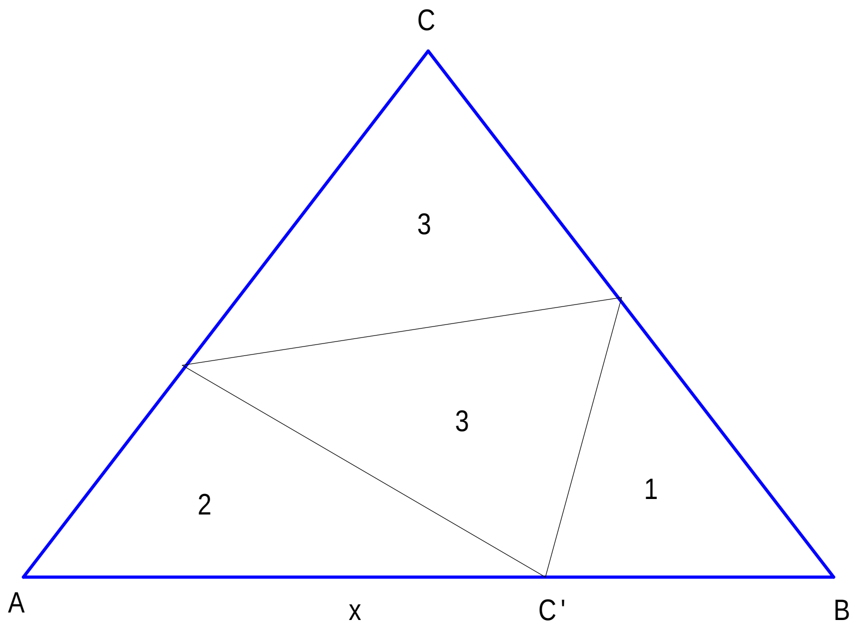

Abbildung 1: Skizze zur Aufgabe

In welcher Entfernung x vom Punkt A muß der Punkt C' liegen, damit die Flächenverhältnisse eingehalten werden ?

Punktezahl = 5

Vorüberlegungen

Wir erweitern die Aufgabenskizze um die Streckenbezeichner x, y, u, v, w, z. Es gilt offensichtlich :

$$x + y = a, \qquad u + v = a, \qquad w + z = a \tag{1}$$

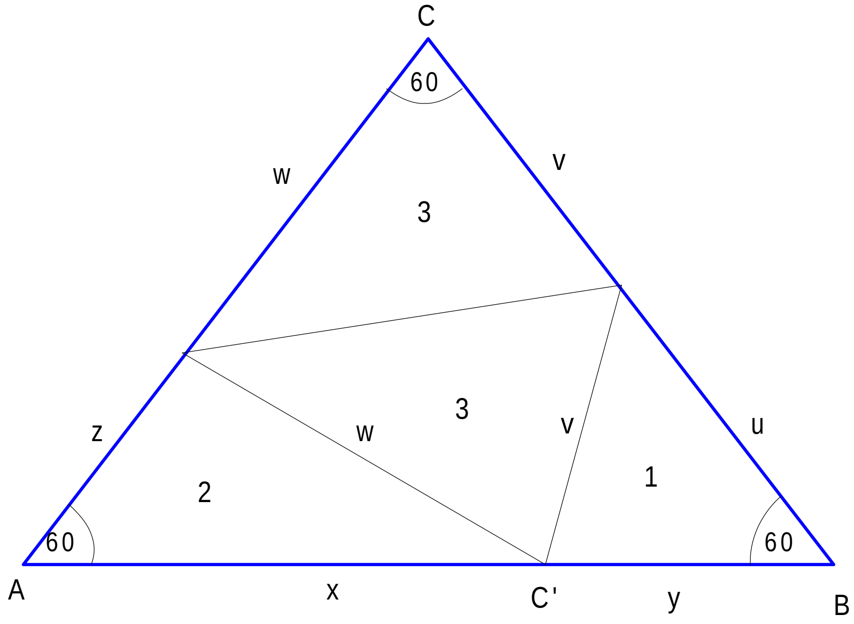

Abbildung 2: Skizze zur Lösung

Die Strecke $x = \overline{AC'}$ kann beliebig im Intervall $0 \leq x \leq a$ variiert werden. Man erkennt rasch, das die Flächeninhalte der vier Teildreiecke voneinander abhängig sind. Bei einem fest gewählten x liegen auf Grund der starren Faltung automatisch die Längen der anderen Strecken fest. **Es ist deshalb nicht möglich für die vier Teildreiecke ein beliebiges Flächenverhältnis vorzugeben, da in Wahrheit nur eine Größe wirklich veränderlich ist !**. Es gelingt lediglich für zwei Teildreiecke ein gewünschtes Verhältnis vorzugeben. Um tatsächlich das gewünschte Verhältnis zwischen den vier Dreiecken zu erhalten, müßte man zusätzlich die Winkel variieren.

Erster Lösungsversuch

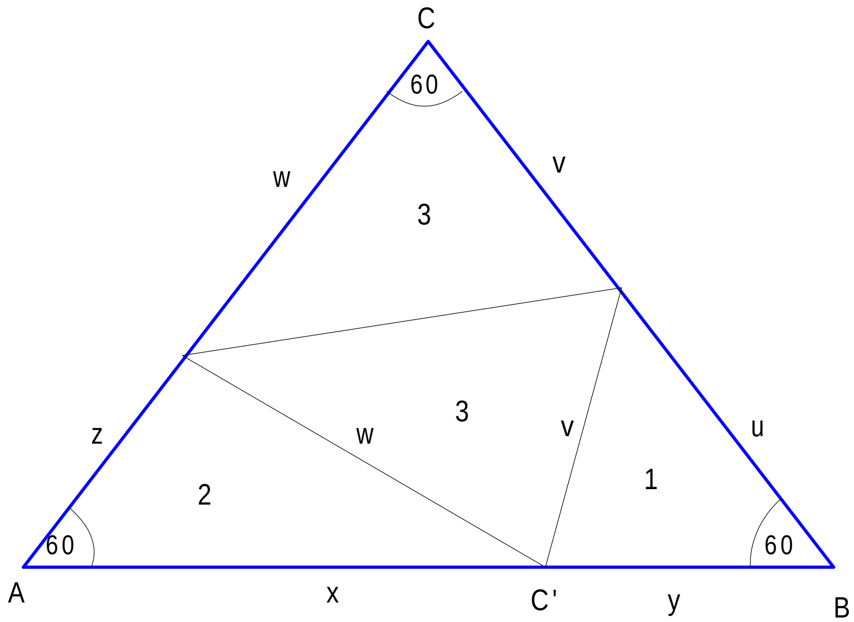

Abbildung 3: Skizze zur Lösung

Der Flächeninhalt im Dreieck berechnet sich aus Produkt der anliegenden Seiten mal Sinus vom eingeschlossenen Winkel geteilt durch 2. Der Innenwinkel im gleichseitigen Dreieck ist bekannt: $\alpha = 60°$. Bezeichnen wir mit F den gesamten Inhalt vom Dreieck so gilt:

$$F = \frac{a^2}{2}\sin(60°) = \frac{a^2}{4}\sqrt{3} \tag{2}$$

Für die anderen Flächenstücke ergeben sich:

$$\frac{2F}{9} = \frac{x\,z}{4}\sqrt{3} \quad \longrightarrow \quad \frac{2\,a^2}{9} = x\,z \tag{3}$$

$$\frac{F}{9} = \frac{y\,u}{4}\sqrt{3} \quad \longrightarrow \quad \frac{a^2}{9} = y\,u \tag{4}$$

$$\frac{F}{3} = \frac{w\,v}{4}\sqrt{3} \quad \longrightarrow \quad \frac{a^2}{3} = v\,w \tag{5}$$

Die Gleichungen (1) bis (5) werden mit Hilfe von *Mathematica* aufgelöst.

$$x = \frac{2a}{3}, \quad y = \frac{a}{3}, \quad u = \frac{a}{3}, \quad v = \frac{2a}{3}, \quad w = z = \frac{a}{2} \tag{6}$$

Betrachten wir das Ergebnis näher. Die Summen $x+y$, $u+v$ und $w+z$ ergeben tatsächlich a. Das Problem an dieser Lösung ist, das die Spitze C vom Dreieck nicht auf der Grundlinie $\overline{AB}$ liegt. Wenn wir die Faltung für $z = \frac{a}{2}$ und $u = \frac{a}{3}$ durchführen, liegt der Punkt C' außerhalb der Linie $\overline{AB}$. Die vierte Teilfläche entspricht damit nicht $\frac{1}{3}$ vom gleichseitigen Dreieck.

Zweiter Lösungsversuch

In diesem Versuch werden wir über den Kosinussatz den Punkt C' fest an die Linie AB binden. Für die Seiten ergibt sich wieder:

$$x + y = a, \qquad u + v = a, \qquad w + z = a \tag{7}$$

Kosinussatz 1 :

$$w^2 = x^2 + z^2 - 2\,x\,z\cos(60^\circ) = x^2 + z^2 - x\,z \tag{8}$$

Kosinussatz 2:

$$v^2 = y^2 + u^2 - 2\,y\,u\cos(60^\circ) = y^2 + u^2 - y\,u \tag{9}$$

Aus dem Vergleich der Flächeninhalte ergeben sich :

$$x\,z = 2\,u\,y \tag{10}$$

und

$$w\,v = 2\,u\,y \tag{11}$$

Das sind bereits 7 Beziehungen für 6 gesuchte Variablen, woraus die Überbestimmtheit des Problems ersichtlich wird. Mit Hilfe von *Mathematica* lösen wir die Gleichungen (7) bis (10) auf. Es ergebnen sich zwei, zueinander symmetrische, Lösungsmengen:

$$v_1 = \frac{1}{2}\,(8\,a - 5\,\sqrt{2}\,a), \quad w_1 = -5\,a + 4\,\sqrt{2}\,a, \quad x_1 = 5\,a - 3\,\sqrt{2}\,a$$

$$y_1 = -4\,a + 3\,\sqrt{2}\,a, \quad u_1 = \frac{1}{2}\,(\,-\,6\,a + 5\,\sqrt{2}\,a), \quad z_1 = -2\,(\,-\,3\,a + 2\,\sqrt{2}\,a)$$

$$v_2 = \frac{1}{2}\,(8\,a + 5\,\sqrt{2}\,a), \quad w_2 = -5\,a - 4\,\sqrt{2}\,a, \quad x_2 = 5\,a + 3\,\sqrt{2}\,a,$$

$$y_2 = -4\,a - 3\,\sqrt{2}\,a, \quad u_2 = \frac{1}{2}\,(\,-\,6\,a - 5\,\sqrt{2}\,a), \quad z_2 = 2\,(3\,a + 2\,\sqrt{2}\,a)$$

Der Punkt C' liegt bei dieser Lösung auf $\overline{AB}$. Das Verhältnis der Flächeninhalte beträgt:

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{w\,v}{u\,y} = \frac{\frac{1}{2}\,(8\,a - 5\,\sqrt{2}\,a)\,(\,-\,5\,a + 4\,\sqrt{2}\,a)}{\frac{1}{2}\,(\,-\,4\,a + 3\,\sqrt{2}\,a)\,(\,-\,6\,a + 5\,\sqrt{2}\,a)} = \frac{1}{14}\,(6 + 19\,\sqrt{2}) \approx 2.34786 \tag{12}$$

$$\frac{F_3}{F_2} = \frac{x\,z}{u\,y} = \frac{-2\,(5\,a - 3\,\sqrt{2}\,a)\,(\,-\,3\,a + 2\,\sqrt{2}\,a)}{\frac{1}{2}\,(\,-\,4\,a + 3\,\sqrt{2}\,a)\,(\,-\,6\,a + 5\,\sqrt{2}\,a)} = 2 \tag{13}$$

Gleichung (12) zeigt, das $F_1 \div F_2$ nicht im geforderten Verhältnis $3 \div 1$ liegen. Damit ist das Problem in der geforderten Aufgabenstellung nicht lösbar.