Gassen Geometrie

von Ingmar Rubin

25. Juni 2006

Zwei Leitern der Längen $e = 10\,m$ und $f = 8\,m$ liegen überkreuz zwischen den Wänden einer Gasse. Der Kreuzungspunkt befindet sich $h = 2\,m$ über dem Boden. Berechne aus den Angaben die Breite der Gasse w!

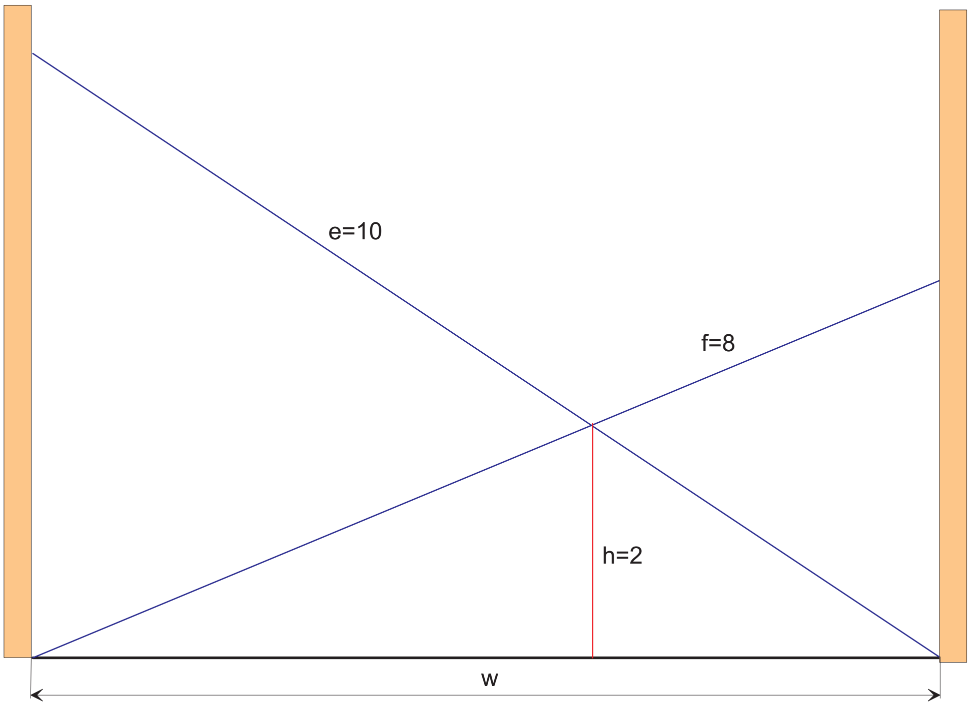

Abbildung 1: Skizze zur Aufgabenstellung

Lösung

Wir ergänzen die Skizze zur Aufgabenstellung um die Streckenbezeichner a, b, c, d. Aus

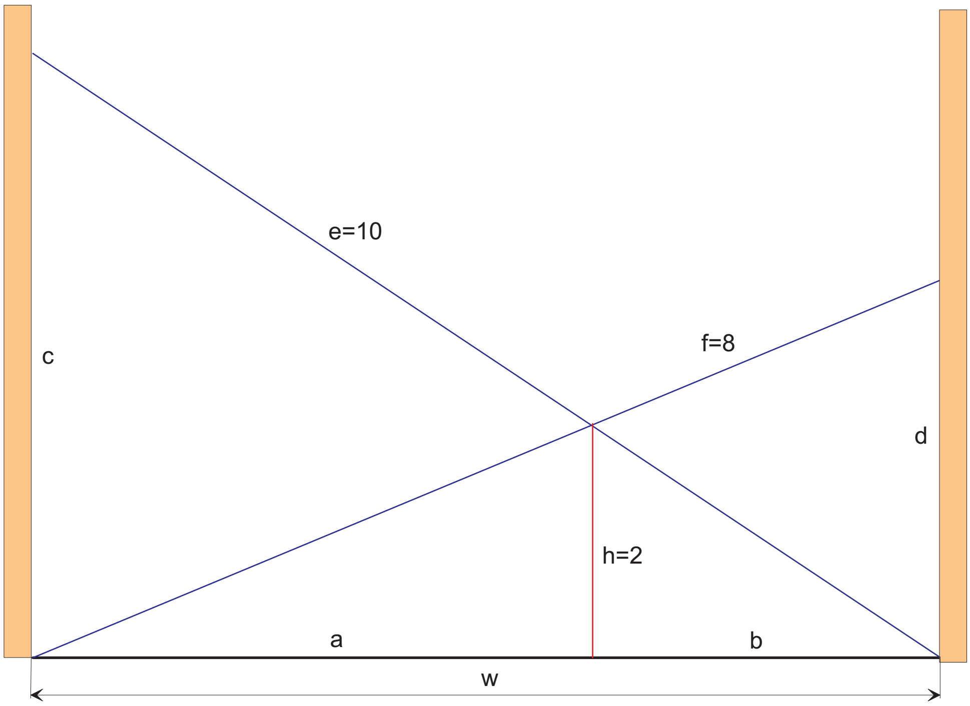

Abbildung 2: Skizze zur Lösung

dem Satz des Pythagoras folgt:

$$w^2 + c^2 = e^2 \quad \rightarrow \quad c = \sqrt{e^2 - w^2} \tag{1}$$

$$w^2 + d^2 = f^2 \quad \rightarrow \quad d = \sqrt{f^2 - w^2} \tag{2}$$

Der Strahlensatz liefert:

$$\frac{a}{h} = \frac{w}{d} \quad \rightarrow \quad a = \frac{w \cdot h}{d} = \frac{w \cdot h}{\sqrt{f^2 - w^2}} \tag{3}$$

$$\frac{b}{h} = \frac{w}{c} \quad \rightarrow \quad b = \frac{w \cdot h}{c} = \frac{w \cdot h}{\sqrt{e^2 - w^2}} \tag{4}$$

Die Summe der Abschnitte a, b ergibt die Breite der Gasse:

$$a + b = w \quad \rightarrow \quad w = \frac{w \cdot h}{\sqrt{f^2 - w^2}} + \frac{w \cdot h}{\sqrt{e^2 - w^2}} \tag{5}$$

Da $w > 0$ ist, kann auf beiden Seiten der Gleichung (5) gekürzt werden:

$$1 = h \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{f^2 - w^2}} + \frac{1}{\sqrt{e^2 - w^2}} \right) \tag{6}$$

Die Wurzelgleichung (6) ist auf algebraischen Weg nur schwer zu lösen. Mit Hilfe eines Computeralgebrasystems wie *Mathematica* erhält man umfangreiche Wurzelterme:

$$w_1 = -\sqrt{78 - 2\sqrt{31 + 21\,3^{1/3} + 15\,3^{2/3}} - 2\sqrt{62 - 21\,3^{1/3} - 15\,3^{2/3} + \frac{16}{\sqrt{31 + 21\,3^{1/3} + 15\,3^{2/3}}}}},$$

$$w_2 = \sqrt{78 - 2\sqrt{31 + 21\,3^{1/3} + 15\,3^{2/3}} - 2\sqrt{62 - 21\,3^{1/3} - 15\,3^{2/3} + \frac{16}{\sqrt{31 + 21\,3^{1/3} + 15\,3^{2/3}}}}}$$

Als numerische Näherung erhält man: $w_2 \approx 7.47102\,m$.