Das geteilte Quadrat

Puzzles from around the world by *Dick Hess*

19. Juli 2001

Gegeben sei ein Quadrat mit der Seitenlänge a. Das Quadrat soll in zwei unterschiedliche Rechtecke geteilt werden, wobei das kleine Rechteck genau in das große Rechteck passen soll, wie in Abbildung 1 dargestellt.

In welchen Verhältnis $a : c$ muß das Quadrat geteilt werden ?

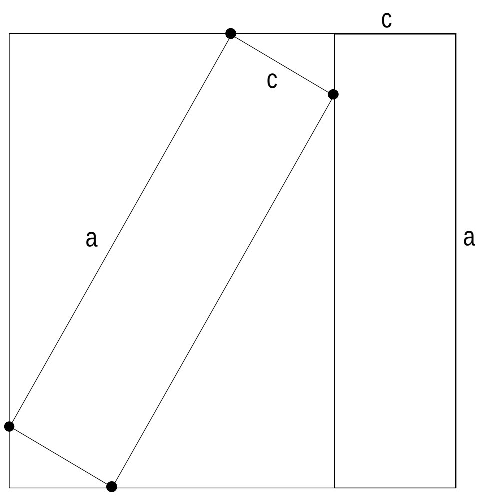

Abbildung 1: Bild zur Aufgabenstellung

Lösungsvorschlag I von Felix Wolfheimer, Rosbach

Wir werden die Aufgabe algebraisch mittels dreier Gleichungen lösen. Die Hilfsgrößen y und z, die bei der Berechnung auftreten, sind in der folgenden Skizze des Problems eingezeichnet.

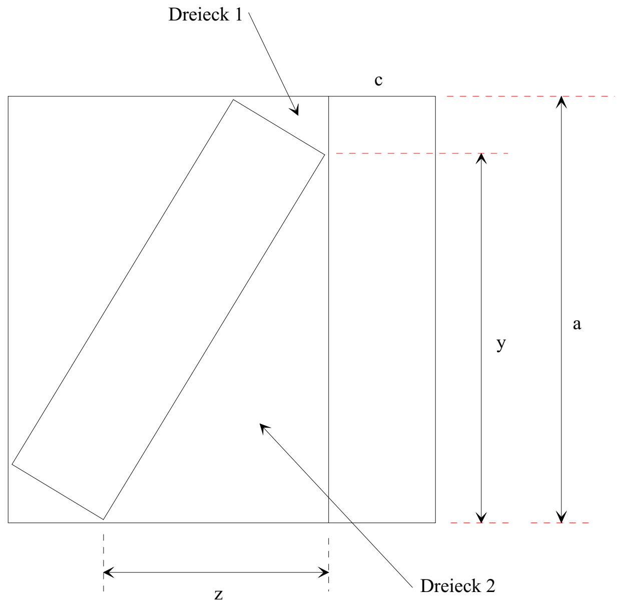

Abbildung 2: Skizze des Problems mit den Hilfsgrößen y und z

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit werden wir im folgenden a den Wert 1 [*Längeneinheit*] zuweisen. Es seih darauf hingewiesen, daß sich das Verhältnis $a : c$ nicht ändert, wenn das Quadrat vergrößert oder verkleinert wird.
Wir werden nun drei Gleichungen aufstellen, die den Zusammenhang zwischen den Größen c, z und y beschreiben. Dieses nichtlineare Gleichungssystem wird sodann nach der Größe c aufgelöst und daraus das gesuchte Verhältnis berechnet.

- Die erste Gleichung, die wir aufstellen können beschreibt den Zusammenhang zwischen y und z. Mit dem Satz des Pythagoras folgt

  $$z = \sqrt{a^2 - y^2}$$

  Mit a=1 gilt folglich

  $$z = \sqrt{1 - y^2} \tag{1}$$

- Die zweite Gleichung folgt aus der Ähnlichkeit der zwei rechtwinkligen Dreiecke, die in der Skizze markiert sind. Da die Dreiecke ähnlich zueinander sind, müssen die Verhältnisse der Seitenlägen in Dreieck 1 und Dreieck 2 gleich sein. Damit folgt

  $$\underbrace{\frac{c}{a-y}}_{Dreieck 1} = \underbrace{\frac{a}{z}}_{Dreieck 2}$$

Setzt man für a=1 und für z den Wert aus Gleichung 1, so erhält man

$$\frac{c}{1-y} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \tag{2}$$

- Die nächste Gleichung ergibt sich wie schon die vorherige aus den Ähnlichkeitssätzen. Nur setzen wir dieses Mal andere Seiten der beiden Dreiecke ins Verhältnis. Es folgt

  $$\underbrace{\frac{c}{a-c-z}}_{Dreieck 1} = \underbrace{\frac{a}{y}}_{Dreieck 2}$$

  Setzt man wieder a=1 ein, so folgt, wenn man außerdem noch für z den Wert aus Gleichung (1) einsetzt

  $$\frac{c}{1-c-\sqrt{1-y^2}} = \frac{1}{y} \tag{3}$$

  Löst man Gleichung (3) nach y auf, so ergibt sich

  $$y = \frac{1-c^2}{1+c^2} \tag{4}$$

Nun eliminieren wir als letztes y aus Gleichung (2), indem wir den unter (4) gefundenen Ausdruck einsetzen. Es folgt

$$\frac{c}{1-c-\sqrt{1-\left(\frac{1-c^2}{1+c^2}\right)^2}} = \frac{1+c^2}{1-c^2}$$

Dies ist die Bestimmungsgleichung für c, die es nun zu lösen gilt. Der Lösungsweg soll mit den unten vorgeführten Schritten grob skizziert werden.

$$\begin{aligned}
\frac{c}{1-c-\sqrt{\frac{4c^2}{(1+c^2)^2}}} &= \frac{1+c^2}{1-c^2} \quad |T \\
\frac{c}{1-c-\frac{2c}{1+c^2}} &= \frac{1+c^2}{1-c^2} \quad |:(1+c^2) \\
\frac{c}{-c^3+c^2-3c+1} &= \frac{1}{1-c^2} \quad |\cdot(-c^3+c^2-3c+1)\cdot(1-c^2) \\
c^2-4c+1 &= 0 \\
c_{1,2} &= 2 \pm \sqrt{3}
\end{aligned}$$

Da natürlich $c < a = 1$ gelten muß, ist die Lösung $c = 2-\sqrt{3}$ die einzig sinnvolle Lösung. Das gesuchte Verhältnis ist daher

$$\frac{a}{c} = \frac{1}{2-\sqrt{3}}$$

Lösungsvorschalg II

Wir bezeichnen die Abschnitte auf den Rechteckseiten wie folgt:

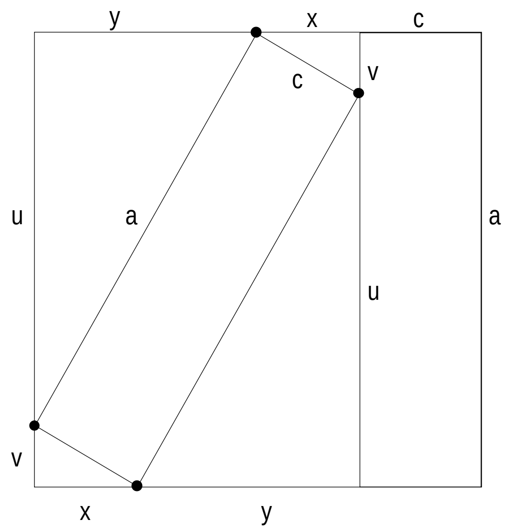

Abbildung 3: Bild zur Aufgabenstellung

Vier Gleichungen lassen sich unmittelbar aus Abbildung 2 ablesen:

$$a^2 = u^2 + y^2 \tag{1}$$

$$c^2 = v^2 + x^2 \tag{2}$$

$$x + y = a - c \tag{3}$$

$$a = u + v \tag{4}$$

Bei gegebenen a enthalten diese vier Gleichungen fünf Unbekannte. Um eine eindeutige Lösung zu erzielen, wird noch ein fünfte Bedingung benötigt.

Betrachtet man das goße Dreick mit den Seiten y, u, a und das kleine Dreieck mit den Seiten v, x, c, so stellt man fest, das es sich um ähnliche Dreieck handelt (gleich große Innenwinkel !). Sie sind um 90° zueiander gedreht. Damit ergibt sich als fünfte Gleichung:

$$\frac{u}{y} = \frac{x}{v} \quad \rightarrow \quad u \cdot v = x \cdot y \tag{5}$$

Weiterhin kann aus dem Flächenäquivalent von Quadrat, den Dreiecken und den beiden Rechteckstreifen $a \cdot c$ eine Beziehung abgeleitet werden:

$$a^2 = 2 \cdot a \cdot c + v \cdot x + u \cdot y \tag{6}$$

Zur Auflösung des Gleichungssystems wird ein Computeralgebraprogramm wie *Derive*, *Maple V* oder *Mathematica* benutzt. In *Mathematica* erhält man als Lösungsmenge für Gleichung $2 \ldots 6$:

$$\text{Solve}[\{gl2, gl3, gl4, gl5, gl6\}, \{x, y, u, v, c\}]$$

$$\begin{aligned}
&\big\{\big\{y \to 0, u \to a, c \to \tfrac{a}{2}, v \to 0, x \to \tfrac{a}{2}\big\}, \big\{y \to \tfrac{a}{2}, u \to -\tfrac{\sqrt{3}a}{2},\\
&\quad c \to 2a + \sqrt{3}a, v \to \tfrac{1}{2}\big(2a + \sqrt{3}a\big), x \to \tfrac{1}{2}\big(-3a - 2\sqrt{3}a\big)\big\},\\
&\big\{y \to \tfrac{a}{2}, u \to \tfrac{\sqrt{3}a}{2}, c \to 2a - \sqrt{3}a, v \to \tfrac{1}{2}\big(2a - \sqrt{3}a\big),\\
&\quad x \to \tfrac{1}{2}\big(-3a + 2\sqrt{3}a\big)\big\}, \big\{y \to \big(\tfrac{1}{2} - \tfrac{i}{2}\big)a, u \to \big(\tfrac{1}{2} + \tfrac{i}{2}\big)a,\\
&\quad c \to 0, v \to \big(\tfrac{1}{2} - \tfrac{i}{2}\big)a, x \to \big(\tfrac{1}{2} + \tfrac{i}{2}\big)a\big\}, \big\{y \to \big(\tfrac{1}{2} + \tfrac{i}{2}\big)a,\\
&\quad u \to \big(\tfrac{1}{2} - \tfrac{i}{2}\big)a, c \to 0, v \to \big(\tfrac{1}{2} + \tfrac{i}{2}\big)a, x \to \big(\tfrac{1}{2} - \tfrac{i}{2}\big)a\big\},\\
&\{y \to a, u \to a, c \to 0, v \to 0, x \to 0\},
\end{aligned}$$

Der erste Fall mit $c = \frac{a}{2}$ bedeutet, das das Quadrat im Verhältnis $\frac{1}{1}$ geteilt wird. Laut Aufgabenstellung soll das Quadrat in zwei unterschiedlich große Rechtecke zerlegt werden.

Die Lösung mit $c = 2a + \sqrt{3}a$ und $u = -\frac{\sqrt{3}a}{2}$ kommt nicht in Betracht, da $c < a$ sein muß und alle Strecken größer Null sein müssen.

Die komplexen Lösungsanteile sind nur im Bereich der theoretischen Mathematik von Bedeutung. Die letzte Teillösung mit $y = a$ und $c = 0$ heißt, dass das Rechteck zur Linie entartet.

Als einzige sinnvolle Lösung verbleibt damit:

$$c = a \cdot (2 - \sqrt{3}) \tag{7}$$
$$x = \frac{a}{2} \cdot (2 \cdot \sqrt{3} - 3) \tag{8}$$
$$v = \frac{a}{2} \cdot (2 - \sqrt{3}) \tag{9}$$
$$u = \frac{\sqrt{3} \cdot a}{2} \tag{10}$$
$$y = \frac{a}{2} \tag{11}$$

In Abbildung 3 ist das Quadrat mit einer Seitenlänge von $a = 6\,cm$ und dem Teilungsverhältnis $\frac{a}{c} = \frac{1}{2-\sqrt{3}}$ dargestellt.

Lösungsvorschlag III

Während der voran gezeigte Lösungsweg auf ein kompliziertes Gleichungssystem führt soll nun eine Lösung gezeigt werden, die mit elementaren Geometriekenntnissen auskommt. Als Lösungsskizze dient Abbildung 4. Es lassen sich folgende Beziehungen ablesen:

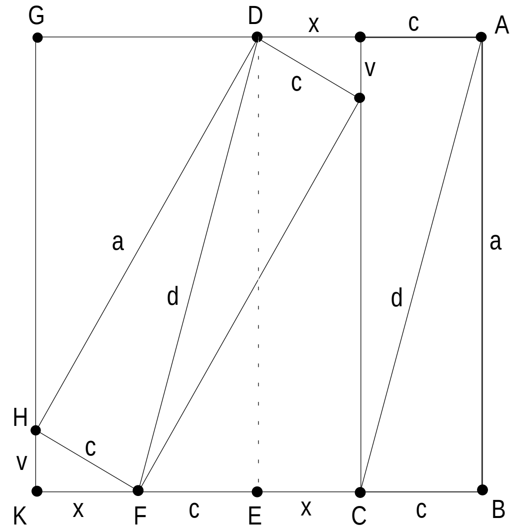

Abbildung 4: Skizze zur zweiten Lösung

$$\triangle ABC = \triangle DEF \quad \rightarrow \quad \overline{FE} = c \tag{1}$$

$$2x + 2c = a \quad \rightarrow \quad x = \frac{a}{2} - c \tag{2}$$

Das $\triangle HGD$ ist dem $\triangle HKF$ ähnlich (gleiche Innenwinkel). Das Verhältnis der Dreiecksseiten muß daher gleich sein.

$$\overline{GD} = \frac{a}{2}, \quad \overline{HD} = a \quad \rightarrow \quad v = \overline{HK} = \frac{1}{2} \cdot \overline{HF} = \frac{c}{2} \tag{3}$$

Der Satz des Pythagoras im $\triangle HKF$ liefert schließlich die Lösung:

$$v^2 + x^2 = c^2 \quad \rightarrow \quad \left(\frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2} - c\right)^2 = c^2 \tag{4}$$

$$\frac{a}{2} - c = \frac{c}{2}\sqrt{3} \quad \rightarrow \quad c = \frac{a}{2 + \sqrt{3}} = a \cdot (2 - \sqrt{3}) \tag{5}$$