Dreiecksrätsel

aus dem Mannschaftswettbewerb *Baltic Way 2001*

Hamburg, 4. November 2001

In einem Dreieck ABC schneidet die Winkelhalbierende des Winkels $\alpha = \sphericalangle BAC$ die Seite $\overline{BC}$ im Punkt D. Es gelte ferner :

$$\overline{BD} \cdot \overline{CD} = (\overline{AD})^2 \quad \text{und} \quad \sphericalangle ADB = 45^\circ \tag{1}$$

1. Bestimmen Sie daraus die Innenwinkel α, β und γ des Dreiecks ABC.
2. In welchem Verhältnis wird Seite $\overline{BC}$ geteilt ?

Punktezahl=7

Bestimmung der Innenwinkel über den Sinussatz

Als Streckenbezeichner und Winkel seien die Buchstaben aus Abbildung 1 gewählt.

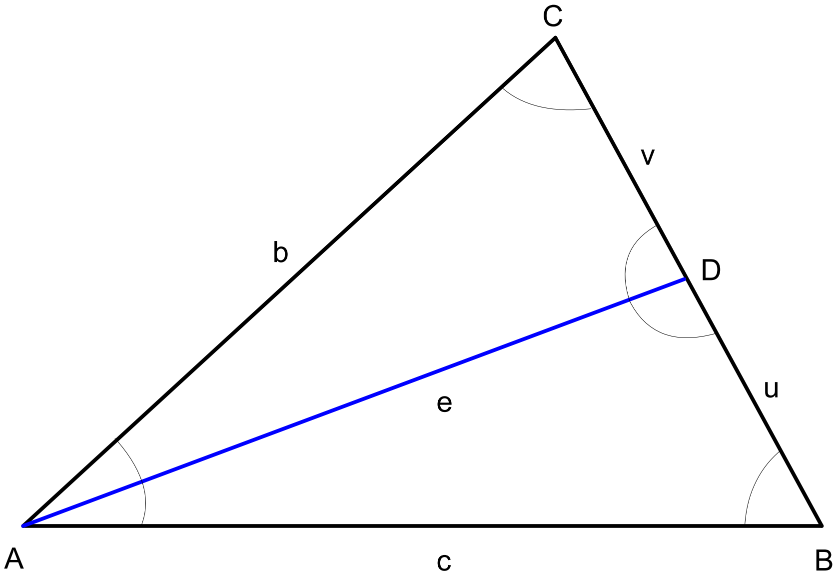

Abbildung 1: Skizze zum Lösungsweg

Nach Aufgabenstellung war der Winkel $\delta = \sphericalangle ADB = 45°$ gegeben. Mit der Winkelsumme im Dreieck ergeben sich für die anderen Winkel:

$$\omega = 180° - 45° = 135°, \quad \gamma = 45° - \alpha, \quad \beta = 135° - \alpha \tag{2}$$

Im Prinzip wird damit nur der Winkel α gesucht, alle weiteren Winkel ergeben sich automatisch. Wir wenden nun zweimal den Sinussatz an.

$$\triangle ADB: \qquad \frac{u}{\sin\alpha} = \frac{e}{\sin\beta} \quad \rightarrow \quad e = \frac{u\,\sin\beta}{\sin\alpha} \tag{3}$$

$$\triangle ADC: \qquad \frac{v}{\sin\alpha} = \frac{e}{\sin\gamma} \quad \rightarrow \quad e = \frac{v\,\sin\gamma}{\sin\alpha} \tag{4}$$

Die Gleichungen (3) und (4) werden miteinander multipliziert. Für das Produkt $u \cdot v$ schreiben wir die Beziehung (1) aus der Aufgabenstellung: $e^2 = u \cdot v$.

$$e^2 = \frac{u\,\sin\beta}{\sin\alpha} \cdot \frac{v\,\sin\gamma}{\sin\alpha} = \frac{e^2\,\sin\beta\,\sin\gamma}{\sin^2\alpha} \tag{5}$$

Da $e > 0$ sein muß, können wir e^2 auf beiden Seiten der Gleichung kürzen :

$$1 = \frac{\sin\beta\,\sin\gamma}{\sin^2\alpha} = \frac{\sin 135° - \alpha\,\sin 45° - \alpha}{\sin^2\alpha} \tag{6}$$

Diese Beziehung kann mit Hilfe der Additiontheoreme in zwei Stufen vereinfacht werden:

$$1 = \frac{\cos[2\,\alpha]}{2\sin[\alpha]^2} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2} = \cos[2\,\alpha] \quad \rightarrow \quad \alpha = 30° \tag{7}$$

Die Innenwinkel im Dreieck ABC lauten damit:

$$\alpha' = 2 \cdot \alpha = 60°, \qquad \beta = 135° - \alpha = 105°, \qquad \gamma = 45° - \alpha = 15° \tag{8}$$

Berechnung des Teilungsverhältnis von Seite $a = \overline{BC}$

Die Winkel $\delta = 45°$ und ω ergänzen sich zu $180°$, also $\omega = 135°$. Mit dem Kosinussatz erhalten wir :

$$\triangle ADB: \qquad c^2 = u^2 + e^2 - 2\,u\,e\cos\delta = u^2 + e^2 - \sqrt{2}\,u\,e \tag{9}$$

$$\triangle ADC: \qquad b^2 = v^2 + e^2 - 2\,v\,e\cos\omega = v^2 + e^2 + \sqrt{2}\,v\,e \tag{10}$$

Für die Winkelhalbierende $\overline{AD}$ gilt :

Satz des Apollonius: *Die Winkelhalbierende teilt die gegenüberliegende Dreicksseite im Verhältnis der anliegenden Seiten.*

$$\frac{b}{v} = \frac{c}{u} \tag{11}$$

Schließlich ist aus der Aufgabenstellung gegeben:

$$u \cdot v = e^2 \tag{12}$$

Die Gleichungen (9) bis (12) werden mit einem Computeralgebrasystem aufgelöst :

$$b = (2+\sqrt{3}) \cdot c, \qquad u = \frac{c}{\sqrt{2}}, \qquad v = \frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \cdot c, \qquad e = \frac{(1+\sqrt{3}) \cdot c}{2} \tag{13}$$

Seite $a = \overline{BC}$ wird im Verhältnis $u \div v$ geteilt:

$$\frac{u}{v} = \frac{1}{2+\sqrt{3}} \tag{14}$$