Der optimale Platz im Theater

aus *Göttinger Mathematikzirkel*

Aufgabenblatt 51, März 2005

Der Neubau des Theaters der Stadt Göttingen hat einen Zuschauerraum mit dem Grundriss eines gleichseitigen Dreiecks mit Seitenlänge 50 Meter. Die Bühne befindet sich in der Mitte einer der Seiten des Dreiecks und ist genau 30 Meter lang. Entlang der anderen beiden Seiten befinden sich die Sitzplätze.
Wo muss man sich hinsetzen, um die beste Sicht auf die Bühne zu haben, um also die Bühne unter dem größtmglichen Blickwinkel zu sehen?

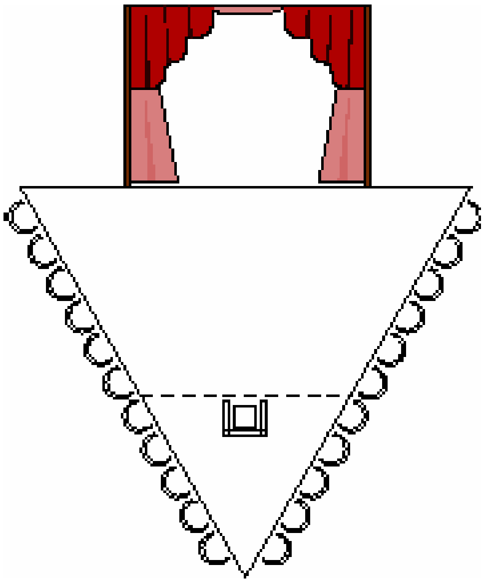

Abbildung 1: Skizze vom Theaterraum und der Bühne

Der Oberbürgermeister verlangt, parallel zur Bühne eine zusätzliche Sitzreihe einzubauen, die die beiden anderen Seiten des Dreiecks verbindet. In der Mitte dieser Reihe soll die Bürgermeisterloge von allen vorhandenen Sitzen die beste Sicht auf die Bühne garantieren. Wie lang ist diese Sitzreihe dann mindestens?

Lösungsvorschlag

nach einer Idee von Jutta Gut und Wolfgang Kirschenhofer, Österreich

Der optimale Fasskreis

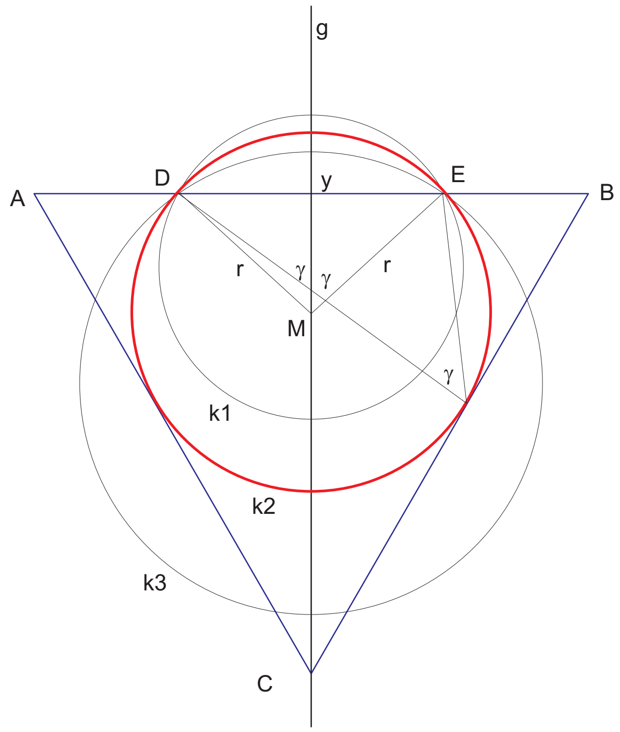

Abbildung 2: Der optimale Fasskreis tangiert genau beide Dreieckseiten

Die Punkte- und Streckenbezeichner seien nach Abbildung 2 gewählt. Wir konstruieren die Mittelsenkrechte g zur Strecke AB. Von der Mittelsenkrechten konstruieren wir (Fass-) Kreise durch die Punkte D, E.
Wir erinnern uns an den Peripheriewinkelsatz, wonach alle Winkel γ über der Sehne DE stets gleich groß sind. Je kleiner der Kreisradius r ist, desto größer wird der zugehörige Peripheriewinkel. Ist der Kreisradius r zu klein (in Abbildung 1 der Kreis k_1) dann berührt (bzw. schneidet) er nicht mehr die Dreieckseiten. Der Kreis k_2 tangiert die Dreieckseiten und liefert damit für unsere Aufgabenstellung das optimale Ergebnis. Wir können den Winkel γ aus dem doppelt so großen Zentriewinkel mit Hilfe des Kosinussatzes bestimmen:

$$y^2 = 2\,r^2 - 2\,r^2\,\cos(2\,\gamma) \quad \rightarrow \quad \cos(2\,\gamma) = 1 - \frac{y^2}{2\,r^2} \tag{1}$$

Bestimmung des Radius vom optimalen Fasskreis

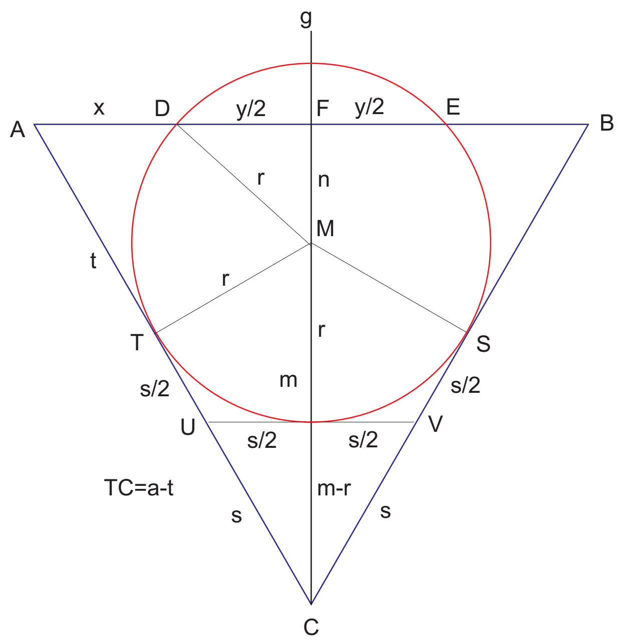

Abbildung 3: Bestimmung des Kreisradius

Den Radius r von k_2 bestimmen wir aus dem *Sehnen-Tangentensatz* und dem *Satz des Pythagoras* (Abbildung 3). Vom Punkt A aus gilt:

$$t^2 = x \cdot (x + y), \quad x = \frac{a - y}{2}, \quad \rightarrow \quad t = \frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{2} \tag{2}$$

Die Höhe h im gleichseitigen Dreieck ABC setzt sich aus dem Abschnitten m, n zusammen:

$$h = m + n = \frac{a \cdot \sqrt{3}}{2} \tag{3}$$

Die Abschnitte m, n berechnen sich aus dem Pythagoras:

$$\triangle DMF : \quad n = \sqrt{r^2 - \frac{y^2}{4}}, \qquad \triangle TMC : \quad m = \sqrt{r^2 + (a - t)^2} \tag{4}$$

Die Auflösung der Gleichungen (2) .. (4) nach r ergibt mit $a = 50, y = 30$:

$$r = \frac{\sqrt{5\,a^2 - y^2 - 4\,a\,\sqrt{a^2 - y^2}}}{2\,\sqrt{3}} = 10\,\sqrt{3} \tag{5}$$

Der Bürgermeister soll von seinem Sitz einen wenigstens ebenso großen Sehwinkel haben wie von den Plätzen S und T. Die Verbindung zwischen den Dreieckseiten sollte daher den optimalen Fasskreis tangieren (Strecke $UV = s$). Zur Berechnung der Seite $UV = s$ gibt es wenigstens zwei Möglichkeiten. Vom Punkt U sind die Tangentenabschnitte an den Kreis gleich groß, d.h. $UT = s/2$. Außerdem ist das Dreieck UCV ebenfalls ein gleichseitiges Dreieck. Es gilt nun :

$$UT + UC = TC \quad \rightarrow \quad \frac{s}{2} + s = a - t, \quad s = \frac{2\,(a-t)}{3} = 20 \tag{6}$$

Weiterhin können wir die Länge von $UV = s$ aus einer Verhältnisgleichung berechnen:

$$\frac{m-r}{s} = \frac{h}{a} \quad \rightarrow \quad s = \frac{2 \cdot (m-r)}{\sqrt{3}} = \frac{2 \cdot (\sqrt{r^2 + (a-t)^2} - r)}{\sqrt{3}} \tag{7}$$

Setzen wir für r das Ergenis aus (5) ein und fassen zusammen, ergibt sich mit $a = 50, y = 30$:

$$s = \frac{1}{3}\sqrt{5\,a^2 - y^2 - 4\,a\,\sqrt{a^2 - y^2}} = 20 \tag{8}$$

Geometrische Konstruktion

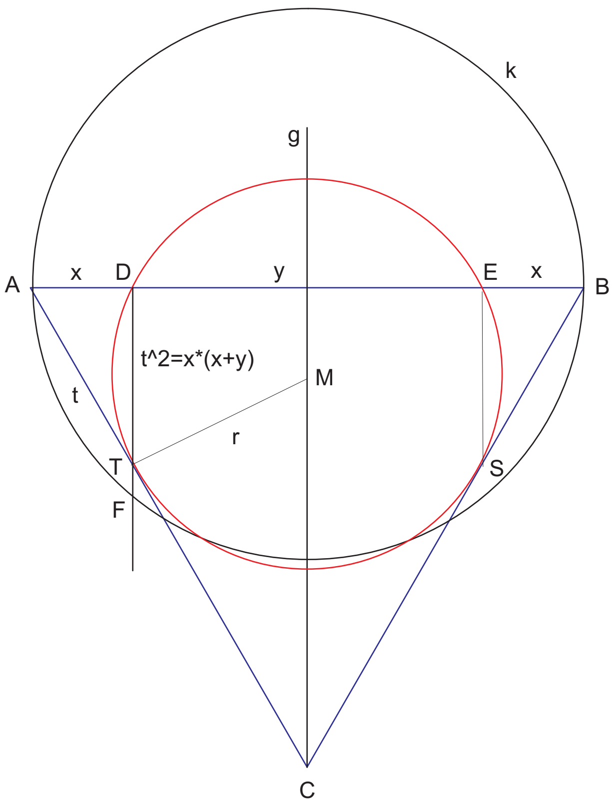

Abbildung 4: Konstruktion des optimalen Fasskreis

Aus dem *Sehnen-Tangentensatz* erkennen wir die Strecke t als geometrisches Mittel aus den Strecken $x = AD$ und $x + y = AE$. Wir zeichnen den Hilfskreis k mit Durchmesser AB. In D errichten wir die Senkrechte zu AB. Der Schnittpunkt mit k sei der Punkt F. Für die Strecke $t = DF$ gilt nun der Höhensatz im rechtwinkligen Dreieck AFB:

$$t^2 = x \cdot (y + x) \tag{9}$$

Die Strecke $t = DF$ tragen wir mit dem Zirkel von A auf AC ab und erhalten den gesuchten Punkt T mit $t = AT$. In T konstruieren wir die Senkrechte zu AC. Der Schnittpunkt der Senkrechten mit der Mittelsenkrechten g von AB ist der gesuchte Kreismittelpunkt M vom optimalen Fasskreis.
Bemerkung: Die numerischen Werte der Aufgabenstellung bedingen, das der Punkt T genau lotrecht über dem Punkt D liegt (und S lotrecht über E). Damit ist natürlich ein kürzerer Konstruktionsweg möglich, d.h. man errichtet in D die Senkrechte und hat mit dem Schnittpunkt auf AC sofort den gesuchten Punkt T. Für andere Werte von y (bei gleichen a) ist das aber nicht der Fall. Im allgemeinen Fall muß man wie oben beschrieben, das geometrische Mittel der Strecken AD und AE konstruieren.