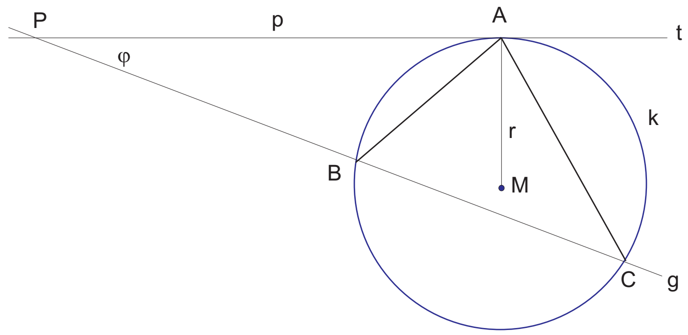
Die Tangente am Kreis

- eine Extremwertaufgabe mit geometrischen Hintergrund von *Ingmar Rubin*

mit Lösungen von: *Rainer Rosenthal, Wolfgang Kirschenhofer,*
Jutta Gut, Dr.Klaus Nagel und Philippe



Zusammenfassung

Extremwertaufgaben aus der Geometrie zählen zu einer interessanten und reizvollen Spezies innerhalb der Mathematik. Die hier vorgestellte Aufgabe wurde ab 3. Mai 2004 in der Internet Newsgroup *de.sci.mathematik* in zwei Variationen vorgestellt.
In den zurückliegenden drei Monaten gingen mehr als 80 Postings ein, die sich mit der Lösung der Aufgabe und ihren Variationen beschäftigt. Auf der Suche das Ergebnis elementargeometrisch zu interpretieren, wurden beachtenswerte Zusammenhänge entdeckt. Insbesondere sind einige, sehr schöne *Zirkel und Lineal* Konstruktionen entstanden, die man bei kurzzeitiger Betrachtung der Aufgabe nicht vermutet hätte.
Ich möchte mich bei den Mathematikfreunden *Rainer Rosenthal, Wolfgang Kirschenhofer, Jutta Gut, Dr.Klaus Nagel und Philippe* herzlich bedanken. Ohne ihr beharrliches Streben nach neuen Lösungswegen und Konstruktionsideen, währe dieser Beitrag wohl kaum denkbar gewesen.
Ich werde nun den Versuch unternehmen, alle Gedanken und Lösungswege zu Papier zu bringen. Die ersten Kapitel zeigen die ursprünglich gestellten Aufgaben und ihre Lösungswege. Es schließen sich Kapitel an, die eine verallgemeinerte Aufgabenstellung behandeln. Die beiden ursprünglichen Aufgaben sind darin mittels Restriktionen enthalten.

Berlin, im Sommer 2004 *Ingmar Rubin*

Inhaltsverzeichnis

1 Aufgabenstellung I

Gegeben sei der Kreis $k(M,r)$. Auf dem Kreis befindet sich der Punkt A durch den die Tangente t läuft. Ein Gerade g schneidet k in den Punkten B, C und die Tangente t im Punkt P. Der Schnittwinkel zwischen t, g sei mit φ bezeichnet.

Gesucht ist die Entfernung $p = AP$, bei gegebenen Winkel $\varphi = 30°$, so dass der Flächeninhalt vom Dreieck ABC maximal wird. Zeige das die Strecke p mit *Zirkel und Lineal* konstruierbar ist.

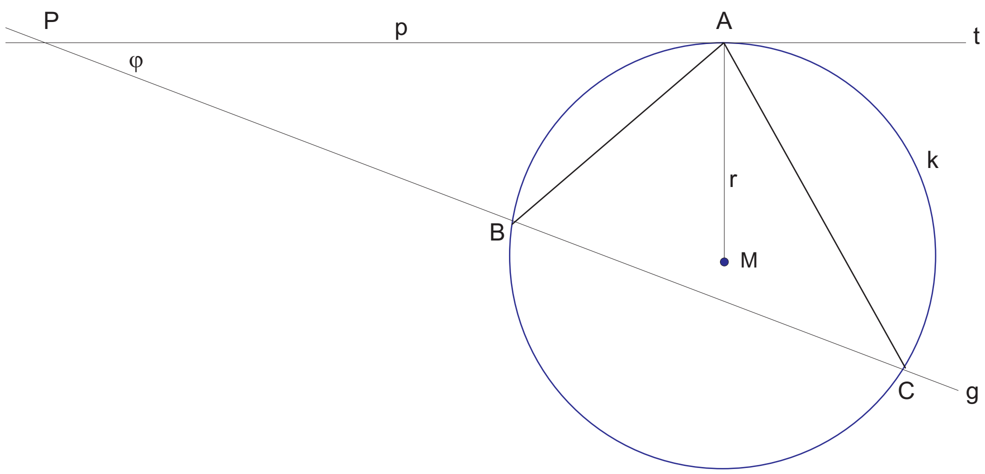


Abbildung 1: Skizze zur Aufgabenstellung I

2 Lösungswege für die Aufgabenstellung I

2.1 Sätze aus der Kreisgeometrie

von Ingmar Rubin - Berlin

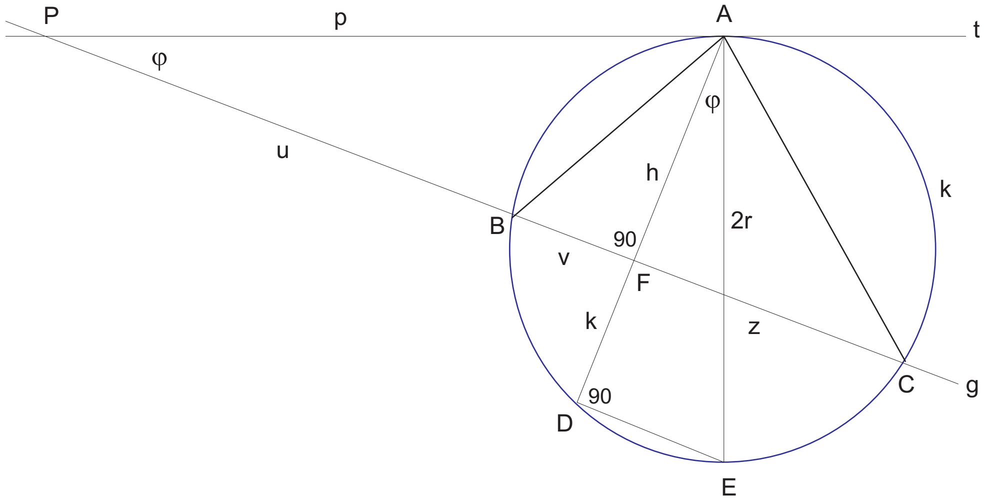


Abbildung 2: Skizze zum Lösungsweg Kreisgeometrie

Wir erweitern die Skizze aus der Aufgabenstellung um die Punkte und Strecken nach Abbildung 2. Vom Punkt A fällen wir das Lot h auf die Gerade g und verlängeren es bis zum Schnittpunkt mit k (Punkt D). Weiterhin zeichnen wir von A den Durchmesser $2\,r = AE$ ein. Das Dreieck ADE liegt über dem Durchmesser AE und ist nach dem *Satz des Thales* rechtwinklig. Die Winkel $\sphericalangle FAE$ und $\sphericalangle FPA$ sind gleich groß. Im Dreieck ADE gilt nun:

$$\triangle ADE: \qquad \frac{h+k}{2\,r} = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \tag{1}$$

Im rechtwinkligen Dreieck APF wenden wir den Tangenssatz an:

$$\triangle APF: \qquad \frac{h}{u+v} = \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} \tag{2}$$

und den Sinusatz:

$$\triangle APF: \qquad \frac{h}{p} = \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad p = 2\,h \tag{3}$$

Der Sehnen-Tangentensatz liefert die Beziehung:

$$p^2 = u \cdot (u+v+z) \tag{4}$$

Schließlich gilt für die sich schneidenden Sehnen BC und AD der *Sehnensatz* im Kreis k:

$$h \cdot k = v \cdot z \tag{5}$$

Der Flächeninhalt im Dreieck ABC berechnet sich aus:

$$A = \frac{h}{2} \cdot (v + z) \tag{6}$$

Die Gleichungen (1) bis (5) werden mit Hilfe eines Computeralgebrasystems (*Mathematica*) nach v, z aufgelöst:

$$v = \frac{1}{2}\left(-r - \sqrt{-4\,h^2 + 4\sqrt{3}\,h\,r + r^2}\right) \tag{7}$$

$$z = \frac{1}{2}\left(r - \sqrt{-4\,h^2 + 4\sqrt{3}\,h\,r + r^2}\right) \tag{8}$$

Die Ergebnisse für v, z setzen wir in (6) ein:

$$A(h) = -\frac{1}{2}\,h\sqrt{-4\,h^2 + 4\sqrt{3}\,h\,r + r^2} \tag{9}$$

Die Extremwertbestimmung über die Nullstellen der 1. Ableitung $A'(h) = 0$ lautet:

$$A'(h) = \frac{8\,h^2 - 6\sqrt{3}\,h\,r - r^2}{2\sqrt{-4\,h^2 + 4\sqrt{3}\,h\,r + r^2}} \tag{10}$$

$$A'(h) = 0 = 8\,h^2 - 6\sqrt{3}\,h\,r - r^2 \quad \rightarrow \quad h = \frac{1}{8}\left(3\sqrt{3}\,r + \sqrt{35}\,r\right) \tag{11}$$

Den gesuchte Abstand $p = AP$ berechnen wir nun aus (3):

$$p = 2\,h = \frac{1}{4}\left(3\sqrt{3}\,r + \sqrt{35}\,r\right) \tag{12}$$

Die Wurzeln der quadratischen Gleichung (11) sind mit *Zirkel und Lineal* konstruierbar.

2.2 Verallgemeinerung auf beliebige Schnittwinkel φ

von Wolfgang Kirschenhofer, Österreich

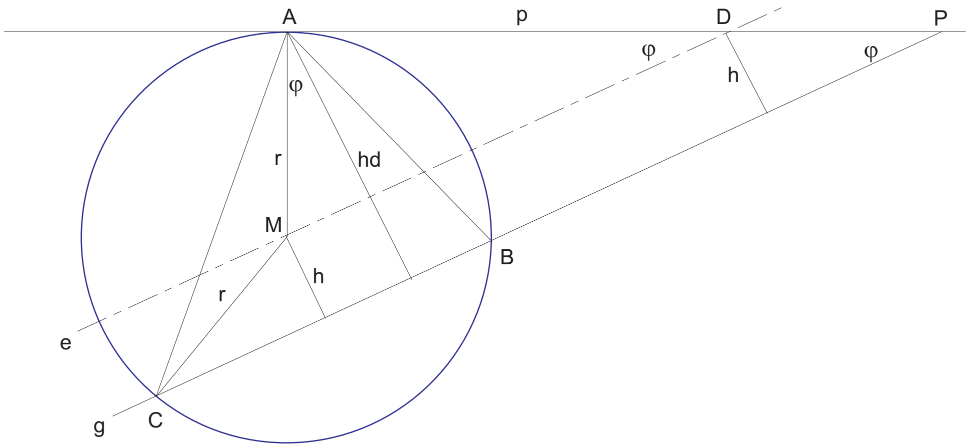


Abbildung 3: Skizze zum Lösungsweg Dreiecksgeometrie

Wir erweitern die Skizze aus der Aufgabenstellung um die Punkte und Strecken nach Abbildung 3. Insbesondere zeichnen wir die Parallele e zur Geraden g durch den Kreismittelpunkt ein. Die Strecke $p = \overline{PA}$ setzt sich wie folgt zusammen:

$$p = \overline{PA} = \overline{AD} + \overline{DP} = \frac{r}{\tan\varphi} + \frac{h}{\tan\varphi} = \frac{h_d}{\sin\varphi} \tag{1}$$

wobei h_d die Höhe auf $\overline{BC}$ im Dreieck ABC ist und h der Normalabstand des Kreismittelpunktes M von der Geraden g ist, mit $0 \le h \le r$.
Für h_d gilt:

$$h_d = h_1 + h = r\,\cos\varphi + h \tag{2}$$

Nach dem pythagoräischen Lehrsatz ist

$$\frac{\overline{BC}}{2} = \sqrt{r^2 - h^2} \tag{3}$$

und für den Flächeninhalt $F(h)$ des Dreiecks ABC gilt weiter:

$$F(h) = \frac{\overline{BC}}{2} \cdot h_d = \sqrt{r^2 - h^2} \cdot (r\,\cos\varphi + h) \tag{4}$$

Die Funktion $F(h)$ hat im Intervall $[0, r]$ ein lokales Maximum, welches gleichzeitig das absolute Maximum ist. Wir ermitteln die Stelle des Maximums durch Nullsetzen der ersten Ableitung , d.h. wir lösen die Gleichung $F'(h) = 0$. Mit Hilfe von DERIVE erhält man:

$$h_{max} = \frac{r}{4} \cdot \left(\sqrt{\cos^2\varphi + 8} - \cos\varphi\right) \tag{5}$$

Aus (2) und (4) erhalten wir für die dreieckshöhe

$$h_{dmax} = r \cdot \cos\varphi + h_{max} = \frac{r}{4} \cdot \left(\sqrt{\cos^2\varphi + 8} + 3 \cdot \cos\varphi\right) \tag{6}$$

Nach (1) und (2) erhalten wir

$$p_{max} = \frac{r}{4 \cdot \sin\varphi} \cdot \left(\sqrt{\cos^2\varphi + 8} + 3 \cdot \cos\varphi\right) \tag{7}$$

Aus (3) und (4) folgt

$$F_{max} = F(h_{max}) = \frac{\sqrt{2}\, r^2}{16} \cdot \sqrt{\cos\varphi\,\sqrt{\cos^2\varphi + 8} + \sin^2\varphi + 3}\,\left(\sqrt{\cos^2\varphi + 8} + 3 \cdot \cos\varphi\right) \tag{8}$$

2.3 Analytische Geometrie

Swen Lünig - Petershagen bei Berlin

Der gesuchte Flächeninhalt F des Dreiecks ABC wird als Differenz der Flächen der Dreiecke ACP und ABP ermittelt $F = F_2 - F_1$. Da beide Dreiecke die gemeinsame Seite AP haben, werden die Flächen aus der Länge dieser Seite und der darauf stehenden Höhe bestimmt. Die Höhen sind dabei die y-Komponenten Koordinaten der Punkte B und C

$$F_1 = \frac{p\, y_1}{2}, \qquad F_2 = \frac{p\, y_2}{2} \tag{1}$$

Eine Skizze mit dem verwendeten Koordinatensystem zeigt die Abbildung 4. Die gesuchte Fläche F ergibt sich somit zu

$$F = \frac{p}{2}\,(y_2 - y_1) \tag{2}$$

Zur Bestimmung der y-Koordinaten der Schnittpunkte B und C werden die Kreisgleichung

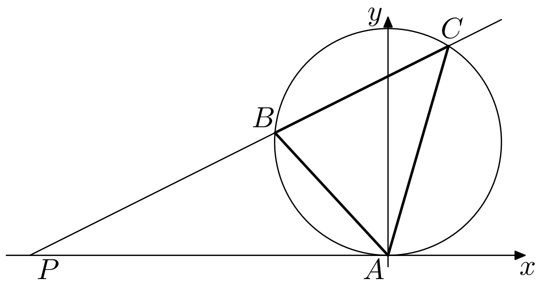


Abbildung 4: Koordinatensystem mit Kreis und Gerade

$r^2 = x^2 + (y - r)^2$ und die sich aus dem vorgegebenen Winkel ergebende Geradengleichung $y = (p + x)/\sqrt{3}$ nach y aufgelöst

$$y_1 = \frac{1}{4}\left(p\sqrt{3} + r - \sqrt{r^2 + 2\sqrt{3}\,p\,r - p^2}\right) \tag{3}$$

$$y_2 = \frac{1}{4}\left(p\sqrt{3} + r + \sqrt{r^2 + 2\sqrt{3}\,p\,r - p^2}\right) \tag{4}$$

Zusätzlich ergibt sich eine Bedingung für p. Dieses darf nämlich nicht so groß werden, dass die Gerade den Kreis gar nicht mehr schneidet. Das gesuchte p muss die Ungleichung $0 \leq r^2 + 2\sqrt{3}\,p\,r - p^2$ erfüllen und damit ergibt sich

$$p \leq \left(2 + \sqrt{3}\right) \cdot r \tag{5}$$

Die Abhängigkeit der Fläche F von p bei gegebenem r lautet nun nach Einsetzen von y_1 und y_2 in Gleichung

$$F(p) = \frac{p}{4}\sqrt{r^2 + 2\sqrt{3}\,p\,r - p^2} \tag{6}$$

Von dieser Formel wird die Ableitung nach p und dann die Nullstellen der Ableitung bestimmt.

$$F'(p) = \frac{-2\,p^3 + 3\sqrt{3}\,p\,r + r^2}{4\sqrt{r^2 + 2\sqrt{3}\,p\,r - p^2}} \tag{7}$$

Die Nullstellen des Zählers sind :

$$p_{01} = \frac{r}{4}\,(3\sqrt{3} - \sqrt{35}), \quad p_{02} = \frac{r}{4}\,(3\sqrt{3} + \sqrt{35}) \tag{8}$$

Die Nullstelle p_{01} kommt nicht in Frage, weil sie negativ ist. Die größere Nullstelle p_{02} erfüllt auch die Bedingung 5. Da es im relevanten Intervall die einzige Nullstelle ist und an den Intervallgrenzen die Fläche F verschwindet, muss es sich um das gesuchte Maximum handeln. Bei $p = r\,(3\sqrt{3} + \sqrt{35}) \div 4$ ist die Fläche des Dreiecks ABC maximal.

2.4 Lösungsweg über Winkelfunktionen

von Jutta Gut, Wien

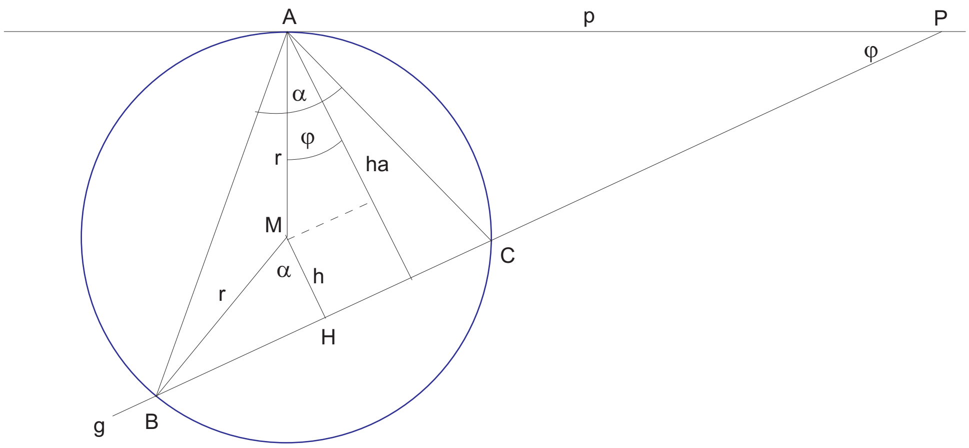


Abbildung 5: Skizze zum Lösungsweg von Jutta Gut

Es sei $\sphericalangle APC = \varphi$ vorgegeben, und $\sphericalangle BAC = \alpha$. H sei der Halbierungspunkt von BC. Dann ist auch $\sphericalangle BMH = \alpha$.

$$BC = 2\,r\,\sin\alpha, \quad h_a = r\,(\cos\alpha + \cos\varphi) \tag{1}$$

Flacheninhalt des Dreiecks ABC:

$$A(\alpha) = r^2\,\sin\alpha\,(\cos\alpha + \cos\varphi) \tag{2}$$

r^2 kann als konstanter Faktor weggelassen werden, der Rest ergibt abgeleitet:

$$A'(\alpha) = \cos\alpha\,(\cos\alpha + \cos\varphi) - \sin^2\alpha = 2\,\cos^2\alpha + \cos\alpha\,\cos\varphi - 1 \tag{3}$$

Nullsetzen ergibt :

$$\cos\alpha = \frac{-\cos\varphi + \sqrt{\cos^2\varphi + 8}}{4} \tag{4}$$

Die zweite Lösung kommt nicht in Frage, da man für α einen stumpfen Winkel und daher sicher keinen maximalen Flächeninhalt erhält. Den gesuchten Abstand AP erhält man aus:

$$AP = \frac{h_a}{\sin\alpha} \tag{5}$$

$$h_a = r\,(\cos\alpha + \cos\varphi) = \frac{r}{4}\cdot(3\,\cos\varphi + \sqrt{\cos^2\varphi + 8}) \tag{6}$$

also

$$AP = \frac{r\,3\,\cos\varphi}{4} + \frac{\sqrt{\cos^2\varphi + 8}}{\sin\varphi} \tag{7}$$

Das kann man noch umformen zu:

$$AP = \frac{3\,r}{4}\cdot\left[\cot\varphi + \sqrt{\cot^2\varphi) + \frac{8}{9}}\right] \tag{8}$$

Fur die Angabe $\varphi = 30^\circ$ erhalt man $\alpha = 58,47^\circ$, $AP = 2,78\,r$.

2.5 Überführung zum gleichschenkligen Dreieck

von Dr. Klaus Nagel - München

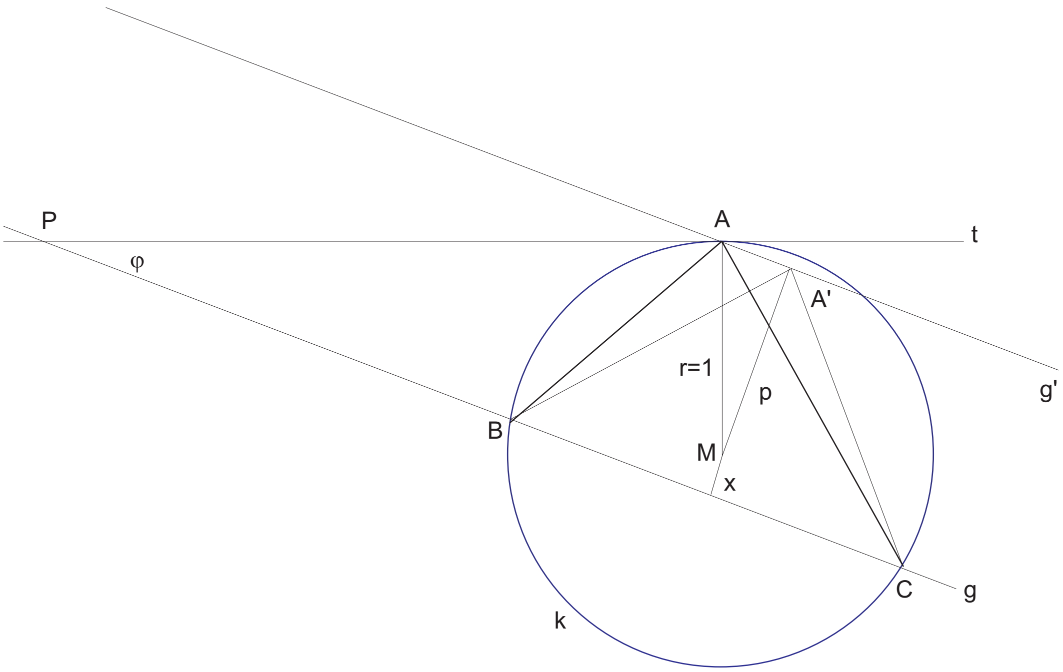


Abbildung 6: Skizze zum Lösungsweg von Klaus

Durch den Punkt A lege ich eine Sehne g' parallel zu g. Der Mittelpunkt dieser Sehne sei A'. Die Dreiecke ABC und $A'BC$ sind flächengleich, daher kann man auch versuchen, die Fläche des gleichschenkligen Dreiecks $A'BC$ zu maximieren. p sei der Abstand $|A'M|$, das Lot von M auf g habe die Länge x. $A'BC$ hat die Fläche

$$F = (p + x)\,\sqrt{(1 - x^2)} \tag{1}$$

(ich rechne mit dem Einheitskreis). Bei maximaler Fläche wird auch das Quadrat G der Fläche maximal:

$$G(x) = F(x)^2 = (p + x)^2\,(1 - x^2) \tag{2}$$

$$G'(x) = 2\,(p + x)\,(1 - x^2) - 2\,(p + x)^2\,x \tag{3}$$

$$G'(x) = 2\,(p + x)\,1 - x^2 - x\,(p + x) \tag{4}$$

Der Faktor $(p + x)$ ist positiv (Höhe des Dreiecks). Der zweite Faktor führt für $G'(x) = 0$ auf eine quadratische Gleichung in x. Die Lösung ist also immer mit Zirkel und Lineal konstruierbar.

3 Zirkel und Lineal Konstruktion zur Aufgabe I

von Rainer Rosenthal, Wolfgang Kirschenhofer und Philippe

3.1 Maximumeigenschaft von gleichschenkligen Dreiecken

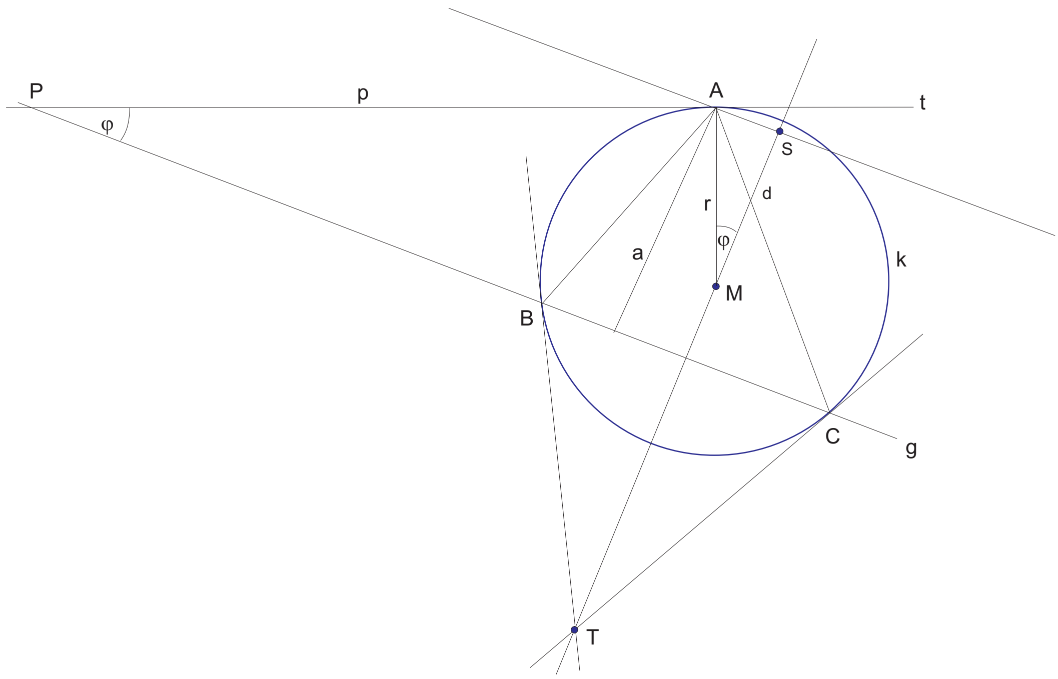


Abbildung 7: Skizze zum Lösungsweg von Rainer

Es hat sich inzwischen herausgestellt, dass Ingmars Aufgabe eine interessante Maximierungsaufgabe enthält, die mit elementaren Mitteln lösbar ist. Die 30 Grad spielen eine völlig untergeordnete Rolle, denn sie gestatten lediglich, die Strecke $p = \overline{AP}$ in einfacher Weise aus dem Abstand von A zu g zu berechnen, weil für diesen Abstand - nennen wir ihn a - gilt:

$$\frac{a}{p} = \sin(\varphi). \tag{1}$$

Das Spannende ist aber die Ermittlung von a. Und das ist inzwischen dadurch gelungen, dass der Punkt S eingeführt wurde, der auf der Parallelen zu g durch A liegt und dessen Verbindungsgerade SM durch den Mittelpunkt M des Kreises k senkrecht auf g steht. Die Dreiecke ASM und AFP sind einander ähnlich. Der Abstand $d = \overline{SM}$ beträgt:

$$d = r \cdot \cos\varphi \tag{2}$$

wenn r den Radius des Kreises k bezeichnet. Es war eine schöne Gemeinschaftsarbeit mit Wolfgang Kir- schenhofer, den Abstand h zwischen M und g herauszufinden:

- Ich hatte plausibel machen können, dass die Tangenten in B und C sich in einem Punkt T treffen, der zu S spiegelbildlich bzgl. g liegt. Das war 'hübsch' und hat die Anstrengungen der Suche gerechtfertigt.

- Wolfgang hat die Beobachtungen durch Rechnung erhärtet und einen wirklich elementaren Beweis für die Maximalität geführt.

Die Grundidee dieses Beweises funktioniert sogar ohne den Kreis und kann dann in dem Kreisproblem angewendet werden: Hast Du zwei Punkte S und T und ist ST die Winkelhalbierende zwischen zwei sich in T schneidenden Geraden t_1 und t_2: dann findest Du das

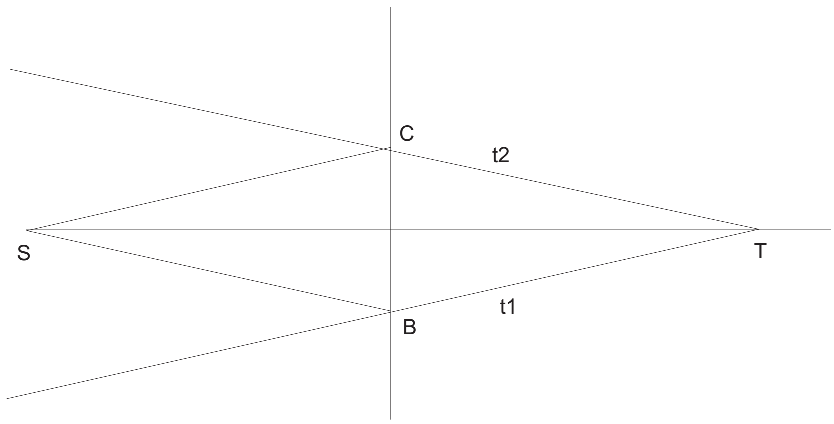


Abbildung 8: Maximumprinzip

maximale Dreieck SBC mit B auf t_1 und C auf t_2 und BC senkrecht zu ST, indem Du die Mittelsenkrechte von S und T zeichnest und die Schnittpunkte mit t_1 und t_2 für B und C nimmst.

Hier hast Du das Variationsproblem 'in der Nussschale': geht man mit BC weg von S, erhält man zwar eine grössere Höhe im Dreieck SBC, aber die Grundseite BC wird kleiner. Es ist wirklich elementar einsichtig und dann auch leicht nachzurechnen, dass in der Mitte ein lokales Maximum für die Fläche SBC besteht.

Bei der Anwendung auf Ingmar Rubins Aufgabe sind t_1 und t_2 die Tangenten an den Kreis k, so dass SBC tatsächlich ein zulässiges Dreieck ist, also eines mit B und C auf dem Kreis k. Der feine Trick von Wolfgang Kirschenhofer bestand nun darin, die Vergleichsdreiecke in der Nähe von SBC zu vergrössern, in dem er sie 'an den Ohren' bis zu den Geraden t_1 und t_2 hinauszog unter Verlängerung der Basis und Beibehaltung des Abstands der Basis zur Spitze S. Weil schon diese vergrösserten Exemplare kleiner sind als SBC, sind es die ursprünglich gewählten Vergleichsdreiecke erst recht. Es ist also SBC maximal. Bis zu diesem Kern hatten wir uns durchgearbeitet, ohne vorher zu wissen, dass es klappen könnte. Wir hatten es lediglich gehofft!

Der Vollständigkeit halber möchte ich nun auch noch den Rückweg zu Ingmars Originalaufgabe vervollständigen. Nach dem bisher Gesagten ist es sofort klar, dass der Abstand zwischen S und T gleich $d+h+h+d$ ist, nämlich d von S bis M, dann h vom M bis g; und dann nochmal die Strecke $h+d$ von g bis zu T. Die Tangentenbedingung ergibt dann (wie von Wolfgang vorgerechnet und auch schnell nachvollziehbar):

$$h \cdot (h+d) = r^2 - h^2 \quad \rightarrow \quad h \cdot (d + 2\,h) = r^2. \tag{3}$$

Das war übrigens die Formel, deren geometrische Interpretation wir uns in den Kopf gesetzt hatten. Bei gegebenem r und d ist h daraus ermittelbar als

$$h = \frac{r}{4} \cdot \left(-d + \sqrt{d^2 + 8}\right) \tag{4}$$

3.2 Äquivalente Aufgabenstellung und Polare

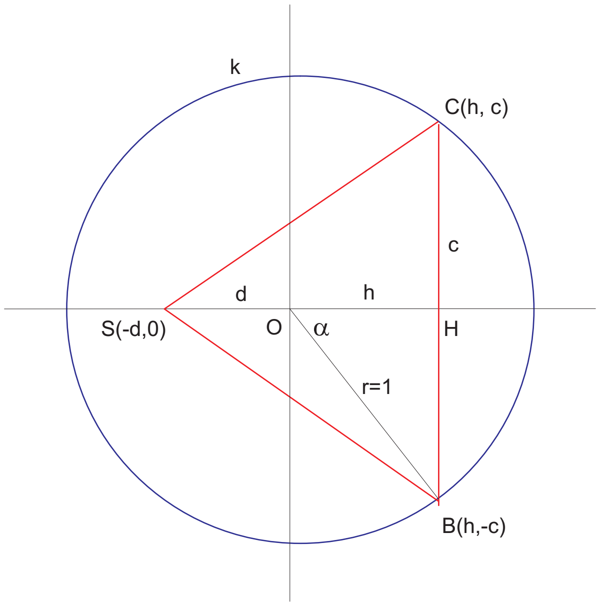


Abbildung 9: Skizze zur äuivalenten Aufgabe

Der Mittelpunkt vom Kreis k mit Radius $r = 1$ befindet sich im Ursprung $O(0, 0)$. Die Spitze des gleichschenkliegen Dreiecks liegt bei $S(-d, 0)$ und die Ecken B und C liegen auf dem Kreis. Seite BC schneidet die x-Achse in $H(h, 0)$. Das Dreieck SBC ist flächengleich mit dem gesuchten Dreieck ABC. Bei gegebenem Punkt S soll nun der optimalen Punkt H bestimmt werden, bei dem die Fläche non SBC maximal ist. Bezeichnet man den Winkel $\sphericalangle HOB$ mit α, dann sieht man, dass die zu maximierende Fläche gleich

$$F = (d + \cos\alpha) \cdot \sin\alpha \tag{1}$$

ist, weil ja $h = \cos\alpha$ und $|HC| = \sin\alpha$ die halbe Basis des Dreiecks SBC ist. Die Fläche kann umgeformt werden zu

$$F = d \cdot \sin\alpha + \frac{\sin 2\,\alpha}{2} \tag{2}$$

und wenn man das ableitet, erhält man

$$F' = -d \cdot \cos\alpha - \cos 2\,\alpha = -d \cdot \cos\alpha - (2 \cdot (\cos^2\alpha - 1), \tag{3}$$

also ist

$$-d \cdot h - (2 \cdot h^2 - 1) = 0 \tag{4}$$

die Maximumbedingung (lokal und auch global, wie man sich klarmachen kann/muss). Zum gleichen Ergebnis gelang man auch ohne Winkelfunktionen:

$$F_{SBC} = \frac{(d+h)\cdot c}{2} = \frac{(d+h)\cdot\sqrt{1-h^2}}{2} = F(h) \tag{5}$$

Daraus erhält man:

$$4\cdot(F(h))^2 = (d+h)^2\cdot(1-h^2) \tag{6}$$

Setzt man:

$$f(h) = (d+h)^2\cdot(1-h^2) \tag{7}$$

dann hat man nun mehr $f'(h) = 0$ zu lösen. Für die Lösung h_{max} gilt dann

$$h_{max}\cdot(2\,h_{max}+d) = 1 \tag{8}$$

und $p = |AP| = 2\cdot h_{max}$ beim Schnittwinkel 30°. Wenn wir nun zur Originalaufgabe zurück-

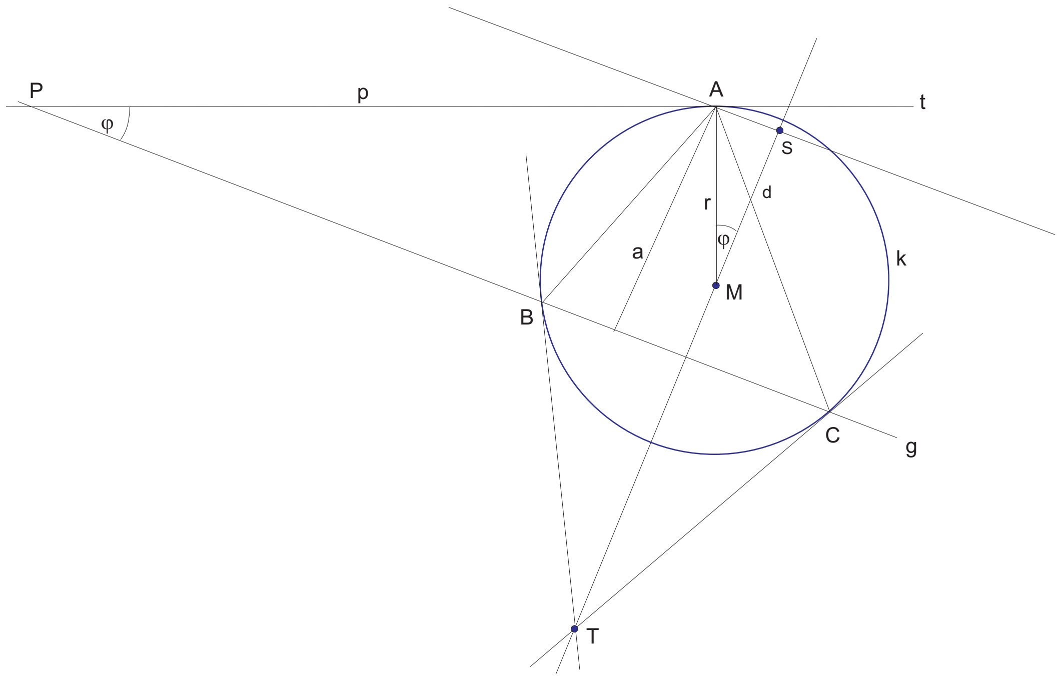


Abbildung 10: Gerade $g(BC)$ als Polare zum Punkt T

kehren läßt sich feststellen, dass die Gerade $g(BC)$ im Maximalfall durch B und C die Polare des Punktes T ist, wobei T das Spiegelbild von S bezüglich der Spiegelungsachse $g(BC)$ ist.

Aufgabe 1 - die Originalaufgabe, schreibe a statt t :
Gegeben sei der Kreis k mit dem Radius r. Auf dem Kreis k befindet sich der Punkt A, durch den die Tangente a läuft. Ein Gerade g schneidet k in den Punkten B, C und die Tangente a im Punkt P. Der Schnittwinkel zwischen a und g betrage α Grad. Gesucht ist die Entfernung $p = AP$ in Abhängigkeit vom Radius r, so dass der Flächeninhalt vom Dreieck ABC maximal wird.

Aufgabe 2:
Gegeben sei der Kreis k mit dem Radius r. Auf dem Kreis k befindet sich der Punkt A, durch den die Tangente a läuft. Ein Gerade g schneidet k in den Punkten B, C und die Tangente a im Punkt P. Der Schnittwinkel zwischen a und g betrage α Grad. Gesucht ist die Entfernung $p = AP$ in Abhängigkeit vom Radius r, wenn g die Strecke zwischen A und dem Pol G der Geraden g halbiert.

Satz 1 (von Rainer Rosenthal): Die 1. und 2. Aufgabe sind zueinander äquivalent.
Hat man Satz 1 bewiesen, dann kann man - wie Rainer - fragen:
Für welchen Winkel α in Aufgabe 2 gilt außerdem, dass die Gerade AG die Strecke PC halbiert ? Die Antwort auf diese Frage gibt der

Satz 2 (von Rainer Rosenthal):
Gilt für den Winkel α aus Aufgabe 2 bzw. Aufgabe 1 außerdem, dass $\alpha = \arctan(\sqrt{2})$ ist, dann halbieren die Strecken AG und PC einander. Weiters ist das Viereck $ACGP$ ein Rechteck mit $|AP| = |CG| = r \cdot \sqrt{2}$ und $|AC| = |PG| = 2 \cdot r$.
Hat man die Aufgabe1 gelöst, was ja bereits in vorangegangenen Beiträgen geschehen ist, dann sind die Beweise von Satz 1 und Satz 2 relativ leicht.

3.3 Konstruktion zur äquivalenten Aufgabe

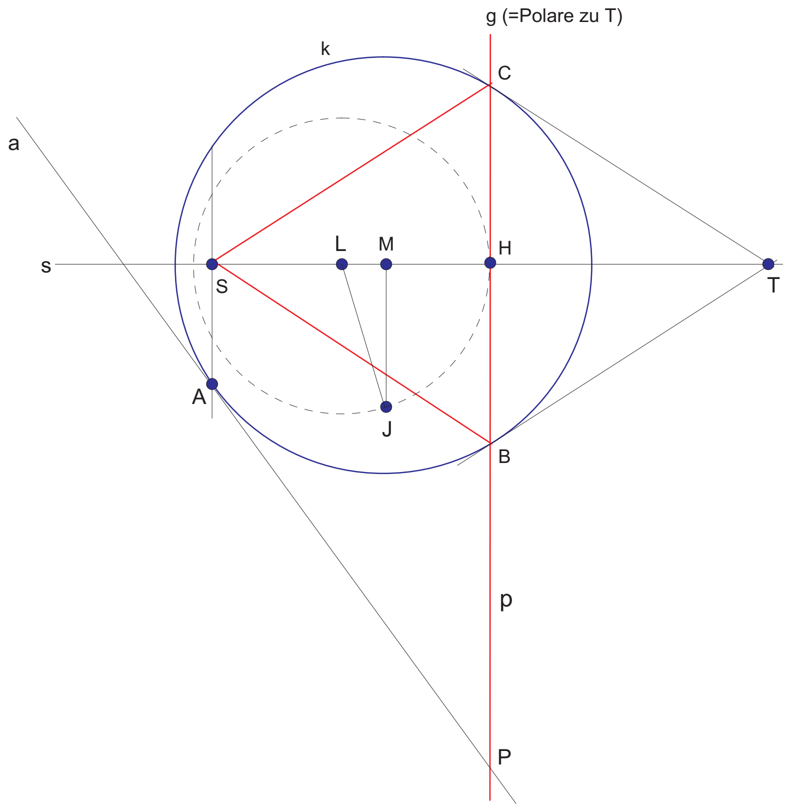


Abbildung 11: Gerade $g(BC)$ als Polare zum Punkt T

Es ist zweckmässig, die Gerade s zu betrachten, die durch den Kreismittelpunkt M läuft. Mit S bezeichnen wir den Fusspunkt des Lots von A auf s. Der Punkt J wird mit einer einfachen Hilfskonstruktion so bestimmt, dass

$$|MJ| = r \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \tag{1}$$

beträgt und JM senkrecht zu s steht. Der Punkt L liegt auf s zwischen S und M und zwar auf einem Viertel des Weges:

$$|LM| = \frac{|SM|}{4} \tag{2}$$

Wir schlagen einen Hilfskreis um L mit Radius $|LJ|$ und bezeichnen mit H den Schnittpunkt des Kreises mit s, für den M zwischen S und H liegt. Die Senkrechte zu s durch H ist die gesuchte Gerade g. Ihr Schnitt mit a bestimmt den Punkt P und damit die gesuchte Länge $p = |AP|$. Für $\alpha = 30°$ gilt :

$$|AP| = \frac{|SH|}{\sin 30°} = 2 \cdot |SH| \tag{3}$$

Wir wollen nun noch zeigen, das die angegeben Konstruktion, tasächlich zum Maximaldreieck führt. Zur Abkürzung wird wie bisher $d = |SM|$ und $h = |MH|$ benutzt. Die Strecke d ist wegen des Winkels $\alpha = 30°$ bestimmt:

$$d = |SM| = \frac{r \cdot \sqrt{3}}{2} \tag{4}$$

Es ist $|LM| = d/4$ und

$$|LH| = |LJ| = \sqrt{(d/4)^2 + (r \cdot \sqrt{2}/2)^2}, \tag{5}$$

d.h.

$$|LH| = \frac{r\,\sqrt{3+32}}{8} = \frac{r\,\sqrt{35}}{8} \tag{6}$$

Daraus folgt

$$|SH| = d + h = d + |LH| - |LM| = \frac{3\,d}{4} + \frac{r\,\sqrt{35}}{8} = \frac{r\,(3\,\sqrt{3} + \sqrt{35})}{8} \tag{7}$$

wegen (1) also

$$|AP| = 2 \cdot |SH| = \frac{r\,(3\,\sqrt{3} + \sqrt{35})}{4} \approx 2.778 \cdot r \tag{8}$$

4 Aufgabenstellung II

Gegeben sei der Kreis $k(M, r)$. Auf dem Kreis befindet sich der Punkt A durch den die Tangente t läuft. In der Entfernung $p = PA$ befinde sich der Punkt P auf der Tangente. Ein Gerade g läuft durch P und schneidet k in den Punkten B, C. Der Schnittwinkel zwischen t, g sei mit φ bezeichnet (Abb.12).
Variere φ so, dass der Flächeninhalt vom Dreieck ABC maximal wird. Zeige, dass die Höhe h_a im Dreieck ABC für den Maximalfall mit *Zirkel und Lineal* konstruierbar ist!

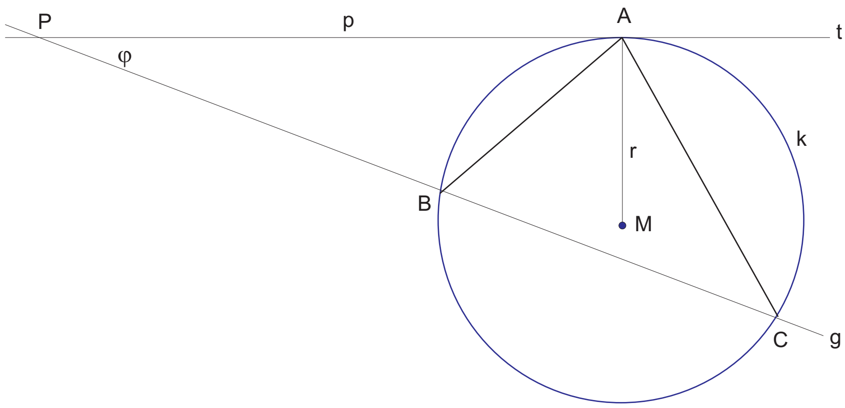


Abbildung 12: Skizze zur Aufgabenstellung

5 Lösungswege für Aufgabenstellung II

5.1 Sätze aus der Kreisgeometrie

von Ingmar Rubin, Berlin

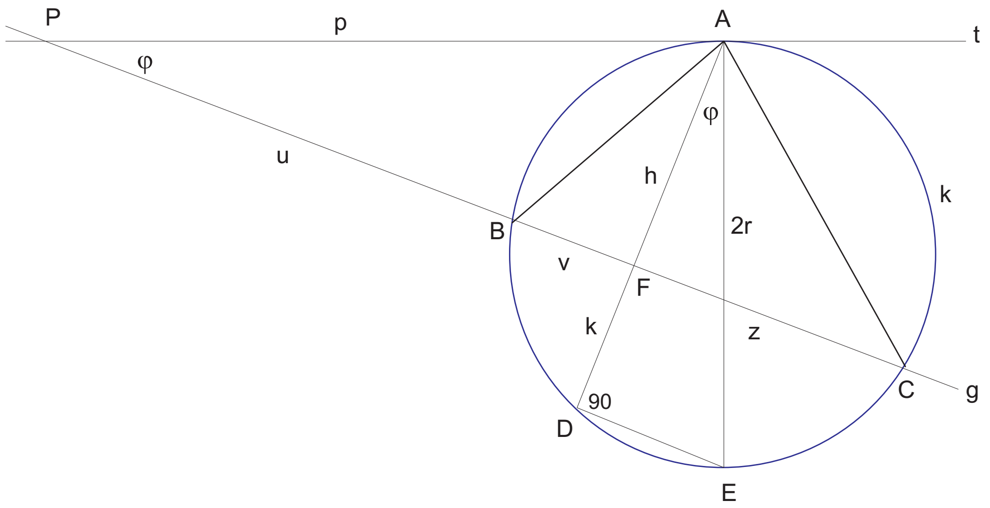


Abbildung 13: Sätze aus der Kreisgeometrie

Wir erweitern die Skizze aus der Aufgabenstellung um die Punkte und Strecken nach Abb.13. Vom Punkt A zeichnen wir die Höhe h auf g und verlängern sie bis zum Schnittpunkt D mit k. Weiterhin zeichnen wir von A den Durchmesser $2\,r = AE$ ein. Die zu maximierende Dreiecksfläche berechnet sich aus:

$$\triangle ABC: \qquad F = \frac{h}{2} \cdot (v + z) \tag{1}$$

Mit Hilfe der Kreisgeometrie ermitteln wir die Strecken v, z in Abhängigkeit von h, p und r. Das Dreieck ADE liegt über dem Durchmesser AE und ist nach dem *Satz des Thales* rechtwinklig. Die Winkel $\sphericalangle FAE$ und $\varphi = \sphericalangle FPA$ sind gleich groß und damit sind die Dreiecke ADE und FPA einander ähnlich.

$$\triangle ADE \sim \triangle FPA: \qquad \frac{2\,r}{h + k} = \frac{p}{u + v} \tag{2}$$

Im rechtwinkligen Dreieck FPA gilt der *Satz des Pythagoras*:

$$\triangle FPA: \qquad p^2 = h^2 + (u + v)^2 \tag{3}$$

Der Sehnen-Tangentensatz liefert die Beziehung:

$$p^2 = u \cdot (u + v + z) \tag{4}$$

Für die sich schneidenden Sehnen BC und AD gilt der Sehnensatz im Kreis k:

$$h \cdot k = v \cdot z \tag{5}$$

Die Gleichungen (2) bis (5) werden mit einem Computeralgebrasystem nach k, u, v, z aufgelöst:

$$z = \frac{h\,r}{p} + \frac{\sqrt{h\left(2\,p\,\sqrt{-h^2+p^2}\,r + h\,(-p^2+r^2)\right)}}{p} \tag{6}$$

$$v = -\frac{h\,r}{p} + \frac{\sqrt{h\left(2\,p\,\sqrt{-h^2+p^2}\,r + h\,(-p^2+r^2)\right)}}{p} \tag{7}$$

Das Einsetzen in (1) liefert:

$$F(h) = \frac{h\,\sqrt{h\left(2\,p\,\sqrt{-h^2+p^2}\,r + h\,(-p^2+r^2)\right)}}{p} \tag{8}$$

Für $r = 1$ und $p = 5$ erhalten wir die folgende Graphik: Wir bilden die erste Ableitung und

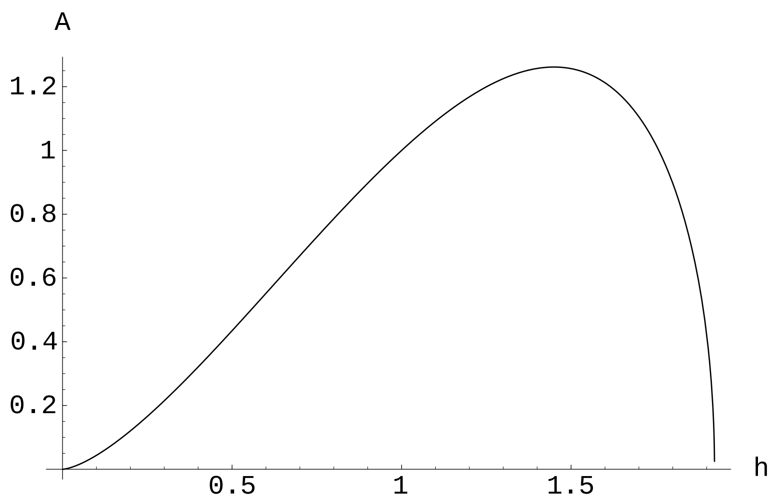


Abbildung 14: Flächeninhalt in Abhängigkeit von h für $r = 1$ und $p = 5$

bestimmen deren Nullstellen:

$$F'(h) = \frac{h\left(-4\,h^2\,p\,r + 3\,p^3\,r + 2\,h\,\sqrt{-h^2+p^2}\,(-p^2+r^2)\right)}{p\,\sqrt{-h^2+p^2}\,\sqrt{h\left(2\,p\,\sqrt{-h^2+p^2}\,r + h\,(-p^2+r^2)\right)}} \tag{9}$$

Es ergeben sich 5 Lösungen, wobei uns nur die Anteile interessieren für die $h > 0$ gilt:

$$h_1 = \frac{\sqrt{p^6 + 4\,p^4\,r^2 + p^2\,r^4 - p^2\,\sqrt{p^8 - p^6\,r^2 - p^2\,r^6 + r^8}}}{(p^2+r^2)\,\sqrt{2}} \tag{10}$$

$$h_2 = \frac{\sqrt{p^6 + 4\,p^4\,r^2 + p^2\,r^4 + p^2\,\sqrt{p^8 - p^6\,r^2 - p^2\,r^6 + r^8}}}{(p^2+r^2)\,\sqrt{2}} \tag{11}$$

Für $r = 1$ und $p = 5$ erhalten wir:

$$h_1 = \frac{1}{26}\sqrt{\frac{1}{2}\left(18150 - 600\sqrt{651}\right)} \approx 1.44964 \tag{12}$$

$$h_2 = \frac{1}{26}\sqrt{\frac{1}{2}\left(18150 + 600\sqrt{651}\right)} \approx 4.9747 \tag{13}$$

Die Lösung h_2 kommt aus geometrischer Sicht nicht in Frage, da $h < 2\,r$ sein muß. Das Maximum des Flächeninhaltes wird also bei h_1 erreicht. Der Winkel φ berechnet sich aus:

$$\sin\varphi = \frac{h_1}{p} = \frac{1.44964}{5} \quad \rightarrow \quad \varphi \approx 16.85364^\circ \tag{14}$$

5.2 Sätze aus der Dreiecksgeometrie

von Wolfgang Kirschenhofer

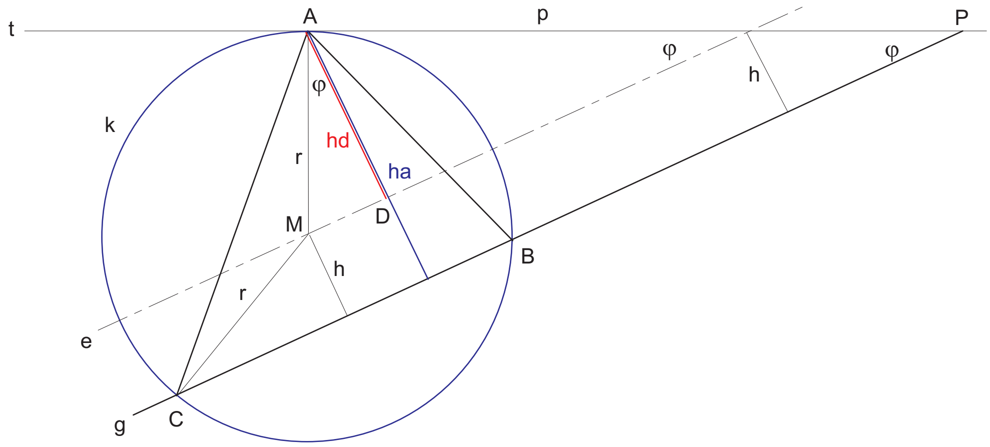


Abbildung 15: Sätze aus der Dreiecksgeometrie

Siehe Abbildung 15: h_a sei die Dreieckshöhe des Dreiecks ABC bezüglich BC.

$$h_a = p \cdot \sin\varphi \tag{1}$$

h sei der Normalabstand des Kreismittelpunktes M von der Geraden g mit $0 \leq h < r$. Für h_a gilt dann weiter:

$$h_a = h_d + h = r \cdot \cos\varphi + h \tag{2}$$

Aus (1) und (2) folgt dann:

$$h = p \cdot \sin\varphi - r \cdot \cos\varphi \tag{3}$$

Nach den pytagoräischem Lehrsatz ist

$$\frac{BC}{2} = \sqrt{r^2 - h^2} \tag{4}$$

und für den Flächeninhalt des Dreiecks ABC gilt weiter:

$$F(h, \varphi) = \frac{BC \cdot h_a}{2} = \sqrt{r^2 - h^2} \cdot (r \cdot \cos\varphi + h) \tag{5}$$

Löst man Gleichung (3) nach $\cos\varphi$ auf, dann erhält man:

$$\cos\varphi = \frac{p \cdot \sqrt{p^2 + r^2 - h^2} - r \cdot h}{p^2 + r^2} \tag{6}$$

Setzt man (6) in Gleichung (5) ein, dann erhält man:

$$F(h) = \frac{\sqrt{r^2 - h^2} \cdot (h\,p + r \cdot \sqrt{p^2 + r^2 - h^2}) \cdot p}{p^2 + r^2} \tag{7}$$

Wir setzen:

$$f(h) = \frac{F(h) \cdot (p^2 + r^2)}{p} = \sqrt{r^2 - h^2} \cdot (h\,p + r \cdot \sqrt{p^2 + r^2 - h^2}) \tag{8}$$

Die Stelle des Maximums erhält man duch Nullsetzen der ersten Ableitung von f:

$$f'(h) = 0 \tag{9}$$

$$f'(h) = \frac{h\,r\,(2\,h^2 - p^2 - 2\,r^2) - p\,(2\,h^2 - r^2)\,\sqrt{r^2 + p^2 - h^2}}{\sqrt{r^2 - h^2} \cdot \sqrt{r^2 + p^2 - h^2}} \tag{10}$$

Aus (8) und (7) erhält man für die gesuchte Stelle h die Gleichung:

$$h\,r\,(2\,h^2 - p^2 - 2\,r^2) = p\,(2\,h^2 - r^2)\,\sqrt{r^2 + p^2 - h^2} \tag{11}$$

In (9) ersetzen wir $h^2 = x$ und bringen die Wurzel durch Quadrieren weg und erhlten schleißlich - nach Division durch $p^2 + r^2$ - die Gleichung dritten Grades:

$$4\,x^3 - 4\,x^2\,(p^2 + 2\,r^2) + x\,r^2\,(5\,p^2 + 4\,r^2) - p^2\,r^4 \tag{12}$$

$$= (x - r^2) \cdot (4\,x^2 - 4\,(p^2 + r^2)\,x + p^2\,r^2) \tag{13}$$

ist daher äquivalent zu :

$$(x - r^2) \cdot (4\,x^2 - 4 \cdot (p^2 + r^2)\,x + p^2\,r^2) = 0 \tag{14}$$

Aus $x = r^2$ würde folgen: $h = r$ und $F(h) = F(r) = 0$ Es ist daher nur noch die quadratische Gleichung:

$$4\,x^2 - 4\,(p^2 + r^2)\,x + p^2\,r^2 = 0 \tag{15}$$

zu lösen.
Die Variable x ist als Lösung der quadratischen Gleichung (15) mit *Zirkel und Lineal* konstruierbar und damit auch $h_{max} = \sqrt{x}$. Daraus folgt weiter, das auch $h_{a,max}$ konstruierbar ist, denn: Hat man h_{max} konstruiert, dann zeichnet man um den Mittelpunkt M den Kreis k_0 mit dem Radius h_{max} und legt von A aus jene Tangente g_0, welche zum größeren Schnittwinkel φ gehört. Der Abstand des Punktes A von g_0 ist dann die Höhe $h_{a,max}$. Nur die Lösung x_1 von (15) ist kleiner r^2

$$x_1 = \frac{p^2 + r^2 - \sqrt{p^4 + p^2\,r^2 + r^4}}{2} \tag{16}$$

Es gilt daher

$$h_{max} = \frac{\sqrt{p^2 + r^2 - \sqrt{p^4 + p^2\,r^2 + r^4}}}{\sqrt{2}} \tag{17}$$

denn $f'(h_{max}) = 0$.
Setz man h_{max} in die Gleichung (7) ein, erhält man den maximalen Flächeninhalt $F_{max} = F(h_{max})$. Den Winkel φ erhält man aus (6). Beispiel: $r = 4, \quad p = 5$

$$h_{max} \approx 1.613837, \quad \varphi_{max} \approx 53.258^\circ, \quad h_{a,max} \approx 4.0067, \quad F_{max} = 14.664437 \tag{18}$$

5.3 Lösungsansatz von Philippe

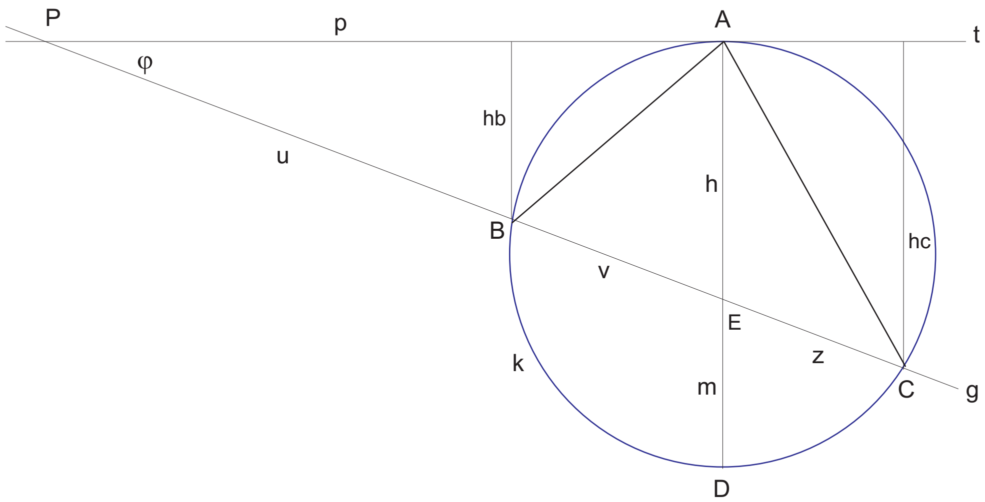


Abbildung 16: $\triangle(ABC) = \triangle(PAC) - \triangle(PAB)$

Wir können die zu maximierende Fläche vom Dreieck ABC auch als Differenz der Dreiecksfläche von PAC und PAB darstellen:

$$\triangle ABC = \triangle PAC - \triangle PAB \quad \rightarrow \quad \triangle ABC = p \cdot (h_c - h_b) \tag{1}$$

Der Strahlensatz vom Punkt P aus liefert:

$$\frac{h_b}{u} = \frac{h}{u+v} = \frac{h_c}{u+v+z} \tag{2}$$

Daraus folgt für die Höhen h_b, h_c:

$$h_b = \frac{u \cdot h}{u+v}, \quad h_c = \frac{h \cdot (u+v+z)}{u+v} \quad \rightarrow \quad h_c - h_b = \frac{h\,(v+z)}{u+v} \tag{3}$$

Mit den Sätzen aus der Kreisgeometrie bestimmen wir u, v, z, m:

$$Sehnensatz: \quad h \cdot m = v \cdot z \tag{4}$$

$$Sehnen-Tangentensatz: \quad p^2 = u \cdot (u+v+z) \tag{5}$$

Die Strecke AD ist der Durchmesser vom Kreis k:

$$|AD| = h + m = 2 \cdot r \tag{6}$$

Im rechtwinkligen Dreieck PAE gilt der *Satz des Pythagoras*:

$$p^2 + h^2 = (u+v)^2 \tag{7}$$

Die Gleichungen (4) bis (7) werden mit einem Computeralgebrasystem aufgelöst:

$$z = -\frac{h\,(h-r)}{\sqrt{h^2+p^2}} + \frac{\sqrt{h\,(h^2+p^2)\,(2\,p^2\,r + h\,(-p^2+r^2))}}{h^2+p^2} \tag{8}$$

$$v = \frac{h\,(h-r)}{\sqrt{h^2+p^2}} + \frac{\sqrt{h\,(h^2+p^2)\,(2\,p^2\,r + h\,(-p^2+r^2))}}{h^2+p^2} \tag{9}$$

$$u = \frac{p^2+h\,r}{\sqrt{h^2+p^2}} - \frac{\sqrt{h\,(h^2+p^2)\,(2\,p^2\,r + h\,(-p^2+r^2))}}{h^2+p^2} \tag{10}$$

Der Flächeninhalt von Dreieck ABC beträgt damit:

$$F = \frac{p}{2}\cdot(h_c - h_b) = \frac{p\,h\,(v+z)}{2\,(u+v)} = \frac{h\,p\,\sqrt{h\,(h^2+p^2)\,(2\,p^2\,r + h\,(-p^2+r^2))}}{(h^2+p^2)^{3/2}} \tag{11}$$

Die Aufgabenstellung II sucht für konstantes p den Winkel φ, der die Fläche vom Dreieck ABC maximiert. Nun gilt im rechtwinkligen Dreieck PAE:

$$\tan\varphi = \frac{h}{p} \tag{12}$$

Eine stetige Änderung von h bedeutet auch eine stetige Änderung von φ, da der Tangens im ersten Quadranten ($0° \le \varphi \le 90°$) eine monoton steigende Funktion ist. Wir bestimmen also zunächst das optimale h und berechnen dann aus (12) den zugehörigen Winkel φ.

$$F'(h) = \frac{h\,p^3\,(-2\,h\,p^2 - h^2\,r + 3\,p^2\,r + 2\,h\,r^2)}{(h^2+p^2)^{3/2}\,\sqrt{h\,(h^2+p^2)\,(2\,p^2\,r + h\,(-p^2+r^2))}} \tag{13}$$

Es genügt die Nullstellen der Zählerfunktion zu ermitteln:

$$0 = h\,p^3\,(-2\,h\,p^2 - h^2\,r + 3\,p^2\,r + 2\,h\,r^2) \tag{14}$$

$$h_0 = 0, \quad h_1 = \frac{-p^2+r^2-\sqrt{p^4+p^2\,r^2+r^4}}{r}, \quad h_2 = \frac{-p^2+r^2+\sqrt{p^4+p^2\,r^2+r^4}}{r} \tag{15}$$

Die Lösung h_1 ist negativ und kommt als Lösung nicht in Frage. Bei gegebenen p, r kann die Strecke h_2 als Lösung einer quadratischen Gleichnung mit *Zirkel und Lineal* konstruiert werden. Der optimale Winkel beträgt dann:

$$\varphi = \arctan\left(\frac{h_2}{p}\right) = \arctan\left(\frac{-p^2+r^2+\sqrt{p^4+p^2\,r^2+r^4}}{p\cdot r}\right) \tag{16}$$

5.4 Konstruktion von Philippe

5.4.1 Konstruktionsvorschrift I

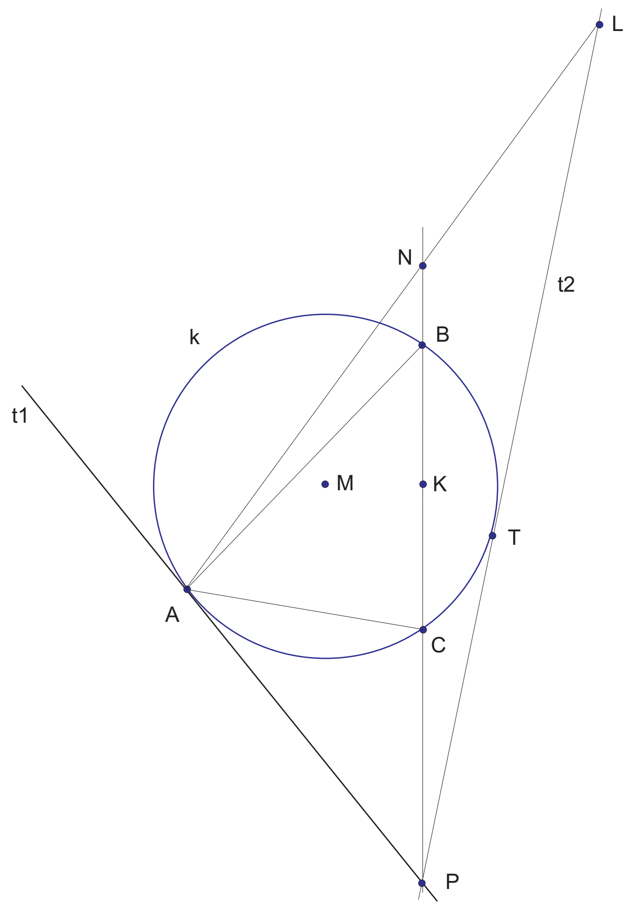


Abbildung 17: Konstruktion von Philippe, Teil 1

Konstruktionsvorschrift I für das maximale Dreieck (Abb.17).

```
- sei A ein Punkt auf dem Kreis k
- t1 ist die Tangente im Punkt A an k
- P ist ein Punkt auf der Tangente t1
- konstruiere die zweite Tangente t2 von P an den Kreis k
- Punkt L liege auf t2 mit |AL| = 2 * |AP|
- konstruiere den Mittelpunkt N der Strecke |AL|
- zeichne die Gerde g durch die Punkte P und N
- die Schnittpunkte von g mit dem Kreis k seien B, C
- das Dreieck ABC ist das gesuchte maximale Dreieck
```

Sei K der Mittelpunkt von $|BC|$. Betrachtet man den Abstand $|AK|$ wenn P sich von A unendlich weit entfernt, erhält man :

$$\lim_{|AP|\to\infty} |AK| = \frac{r \cdot 3}{2} \qquad (1)$$

In diesem Fall nähert sich das Dreieck ABC einem gleichseitigen Dreieck, dass von allen Dreiecken den maximal möglich Flächeninhalt im Kreis annehmen kann. Weiterhin erkennt man für den Fall $|AP| = r$ dass der Winkel $\sphericalangle APB = 60\circ$ beträgt.

5.4.2 Konstruktionsvorschrift II

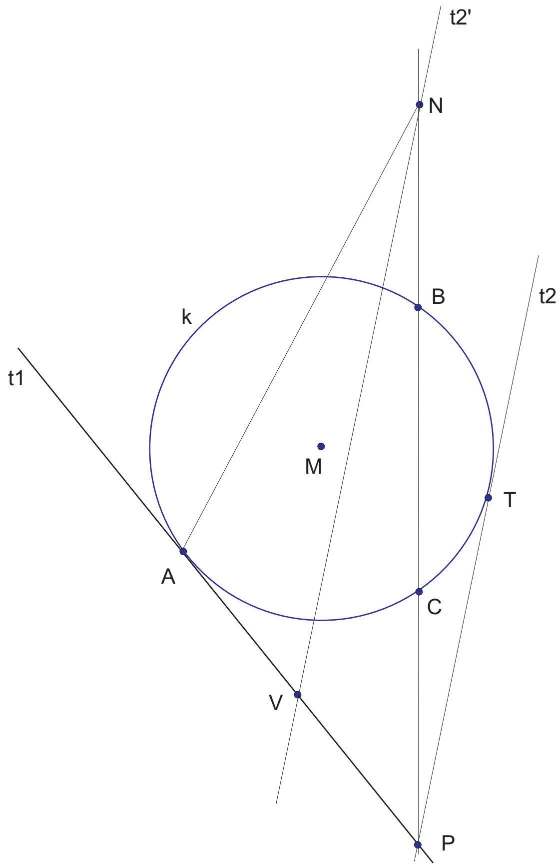


Abbildung 18: Konstruktion von Philippe, Teil 2

Konstruktionsvorschrift II für das maximale Dreieck (Abb.18).

```
- sei A ein Punkt auf dem Kreis k
- t1 ist die Tangente im Punkt A an k
- P ist ein Punkt auf der Tangente t1
- V ist der Mittelpunkt von |AP|
- konstruiere die zweite Tangente t2 von P an den Kreis k
- konstruiere die Parallele t2' zu t2 durch den Punkt V
- konstruiere den Punkt N auf t2' mit |AN| = |AP|
- zeichne die Gerde g durch die Punkte P und N
- die Schnittpunkte von g mit dem Kreis k seien B, C
- das Dreieck ABC ist das gesuchte maximale Dreieck
```

Untersucht man die Konstruktionen von Philippe weiter stellt man fest:

Satz vom Höhenschnittpunkt: Der Höhenschnittpunkt des maximalen Dreiecks ABC liegt auf der Strecke $|PM|$.
Einen schönen Beweis für diese Beobachtung liefert uns *Jutta Gut* im übernächsten Abschnitt.

5.5 Ortslinie aller Höhenschnittpunkte

von Wolfgang Kirschenhofer

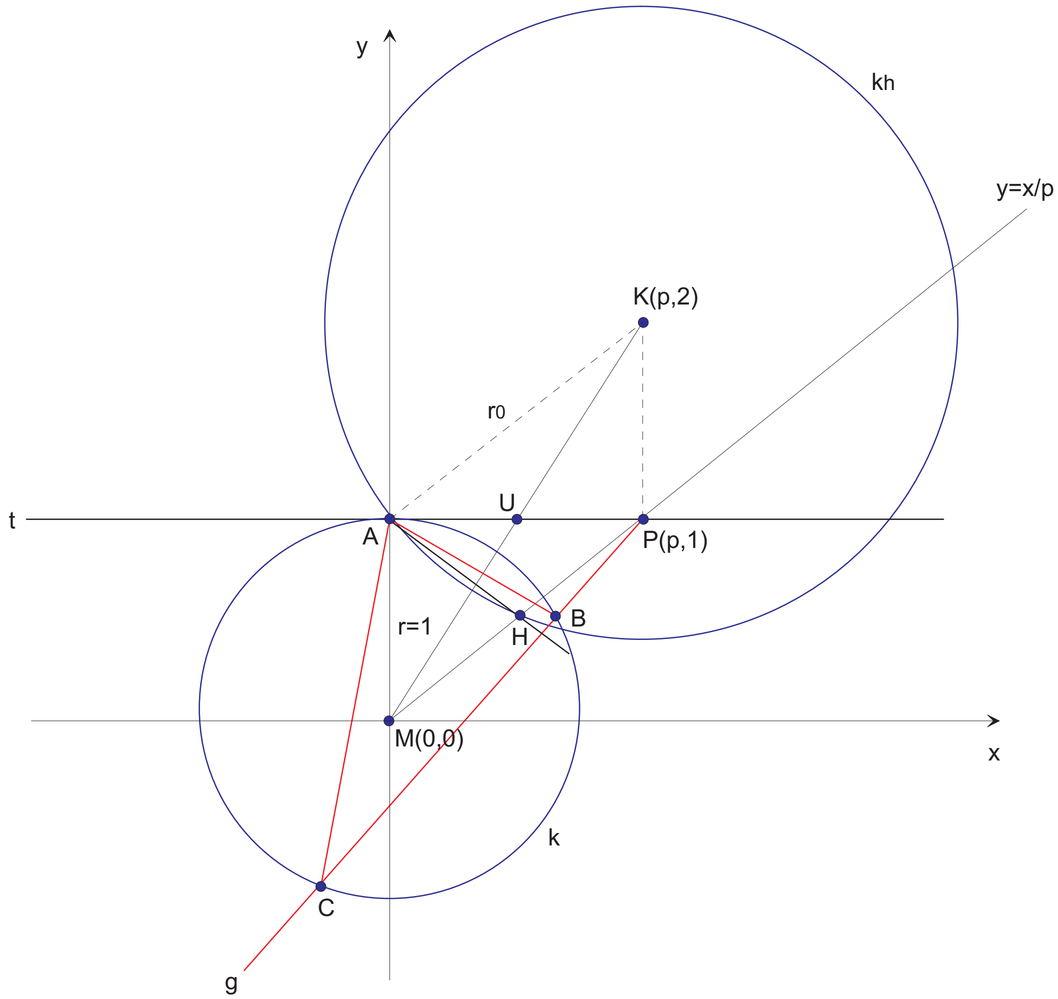


Abbildung 19: der Kreis k_h als Ortslinie aller Höhenschnittpunkte

Man führt ein kartesisches Koordinatensystem so ein, daß der Kreismittelpunkt M des gegebenen Kreises k vom Radius $r = 1$ im Ursprung liegt. k hat dann die Gleichung:

$$x^2 + y^2 = 1 \tag{1}$$

Es sei $A = (0, 1)$ und $P = (p, 1)$. Betrachtet man die Ortslinie aller Höhenschnittpunkte der Dreiecke ABC (mit variablem Winkel α), dann ist dies der Kreis k_h mit dem Mittelpunkt $K := (p, 2)$ und dem Radius $r_0 := \sqrt{p^2 + 1}$. Ein überaus einfaches und schönes Ergebnis. Der Punkt H_{max} ergibt sich dann als einer der beiden Schnittpunkte des Kreises

$$(x - p)^2 + (y - 2)^2 = p^2 + 1 \tag{2}$$

mit der Geraden

$$y = \frac{x}{p} \tag{3}$$

Der andere Schnittpunkt liegt oberhalb der Kreistangente t mit dem Berührungspunkt $A = (0, 1)$, gehört also zu keinem Dreieck der in Frage kommenden Dreiecksmenge. Für den Höhenschnittpunkt H_{max} des Dreiecks ABC mit maximalem Flächeninhalt gilt dann:

$$H_{max} : \left(\frac{p \cdot (p^2 + 2 - \sqrt{p^4 + p^2 + 1})}{p^2 + 1}, \frac{p^2 + 2 - \sqrt{p^4 + p^2 + 1}}{p^2 + 1} \right) \tag{4}$$

Konstruktionstext für H_{max}

```
- Bezeichne mit U den Mittelpunkt von |AP|,
- Verlaengere |MU| ueber U hinaus bis zu Punkt K mit |MU| = |UK|,
- Schlage um K den Kreis durch A und schneide ihn mit der
  Geraden PM im Punkt H zwischen P und M.
- Zeichne die Gerade g senkrecht zu AH durch P.
- Schneide g mit dem Kreis k in den Punkten B und C.
Das Dreieck ABC hat maximale Flaeche.
```

5.6 Einbeziehung von Winkelfunktionen

von Jutta Gut, Wien

5.6.1 Berechnung vom Winkel ϵ

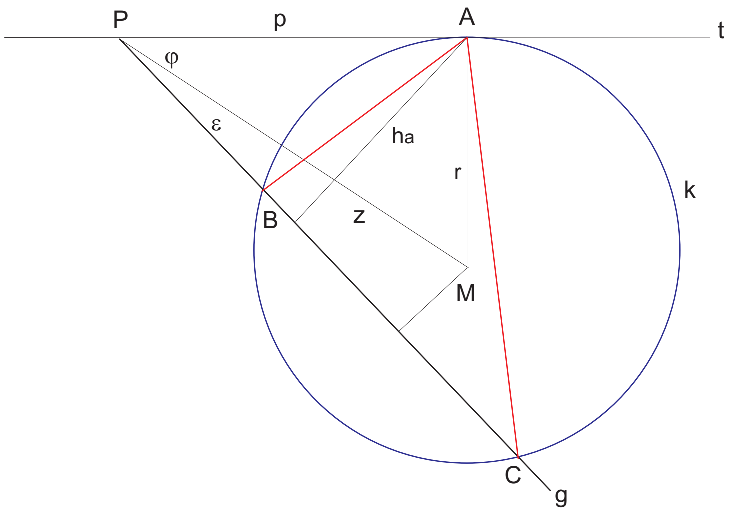


Abbildung 20: Berechnung von ϵ

Die Fläche F vom Dreieck ABC beträgt:

$$F = \frac{\overline{BC} \cdot h_a}{2} \tag{1}$$

$$\frac{\overline{BC}}{2} = \sqrt{r^2 - z^2 \sin^2 \epsilon} = \sqrt{r^2 - (r^2 + p^2) \sin^2 \epsilon} = \sqrt{r^2 \, cos^2 \epsilon - p^2 \sin^2 \epsilon} \tag{2}$$

$$h_a = p \sin(\varphi + \epsilon) = p \,(\sin \varphi \cos \epsilon + \cos \varphi \sin \epsilon) \tag{3}$$

$$h_a = p \cdot \left(\frac{r \cos \epsilon}{z} + \frac{p \sin \epsilon}{z} \right) = \frac{p \,(r \cos \epsilon + p \sin \epsilon)}{z} \tag{4}$$

$$F^2 = \frac{p^2}{z^2} \cdot \left(r^2 \cos^2 \epsilon - p^2 \sin^2 \epsilon \right) \cdot (r \cos \epsilon + p \sin \epsilon)^2 \tag{5}$$

Den konstanten Faktor p^2/z^2 können wir weglassen, es bleibt nach Umformung

$$f(\epsilon) = (r \cos \epsilon + p \sin \epsilon)^3 \,(r \cos \epsilon - p \sin \epsilon) \tag{6}$$

Mit Produkt- und Kettenregel abgeleitet und umgeformt (das ist der mühsame Teil der Rechnung!) erhalten wir

$$f'(\epsilon) = (r\,\cos\epsilon + p\,\sin\epsilon)^2\,(2\,r\,p - 4\,(r^2 + p^2)\,\sin\epsilon\,\cos\epsilon) \tag{7}$$

Wenn der erste Faktor 0 ist, wird $h_a = 0$. Das ergibt also kein Maximum. Es muss daher gelten:

$$2\,r\,p = 4\,(r^2 + p^2)\,\sin\epsilon\,\cos\epsilon = 2\,(r^2 + p^2)\,\sin 2\,\epsilon \tag{8}$$

und wir erhalten als Ergebnis

$$\sin 2\,\epsilon = \frac{r\,p}{r^2 + p^2} = \frac{r\,p}{z^2} \tag{9}$$

Das können wir noch weiter umformen zu

$$\sin 2\,\epsilon = \sin\varphi \cdot \cos\varphi = \frac{\sin 2\,\varphi}{2} \tag{10}$$

5.6.2 Konstruktion der Winkelhalbierenden

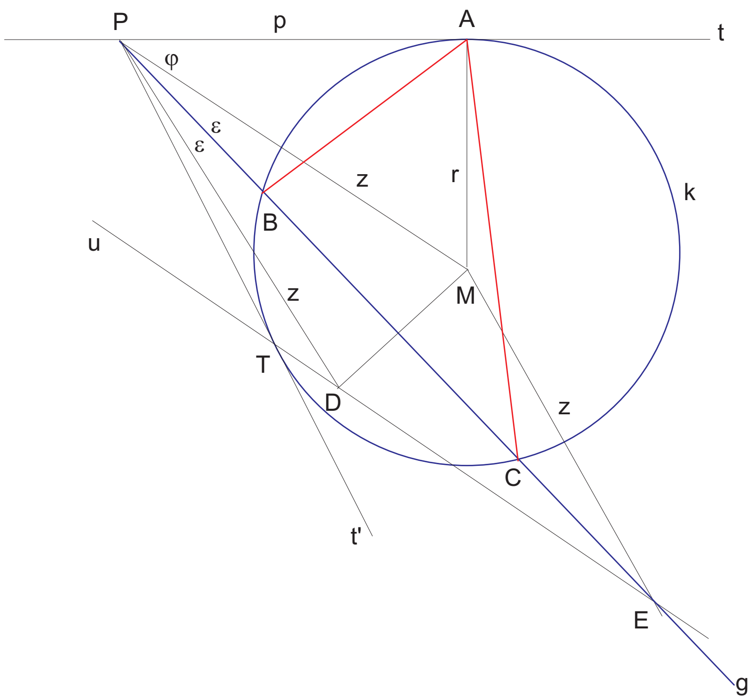


Abbildung 21: Konstruktion der Winkelhalbierenden

Vom Punkt P legen wir die zweite Tangente t' an den Kreis k und bezeichnen den Berührungspunkt mit T. Im nächsten Schritt konstruieren wir die Parallele u zur Strecke PM durch den Punkt T. Vom Punkt P tragen wir mit dem Zirkel die Entfernung $z = PM$ bis zum Schnitt mit u ab. Den neuen Schnittpunkt auf u bezeichnen wir mit D. Die Winkelhalbierende des Winkels $\sphericalangle DPM$ ist die gesuchte Gerade g, die k in den Punkten B, C schneidet. Das Dreieck ABC hat genau dann maximalen Flächeninhalt.

5.6.3 Beweis das der Höhenschnittpunkt auf $\overline{PM}$ liegt

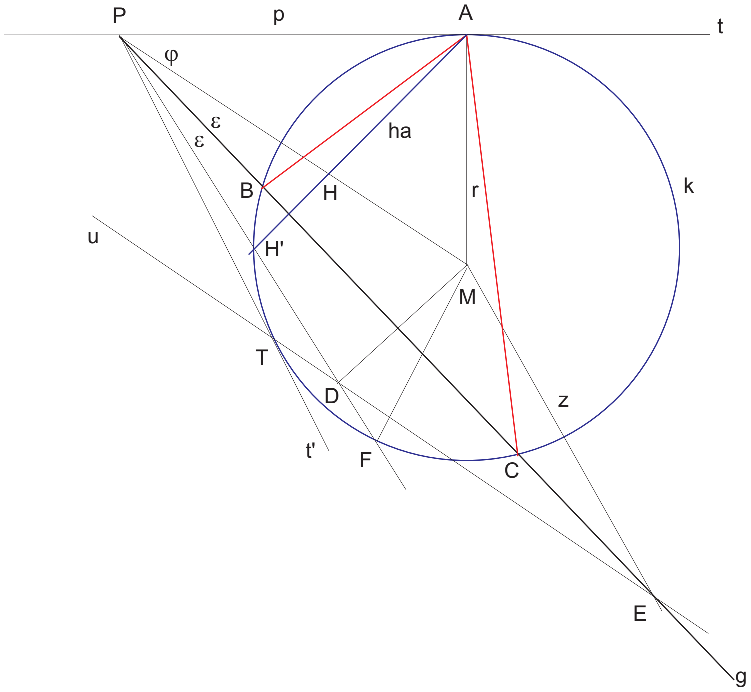


Abbildung 22: Der Höhenschnittpunkt von $\triangle ABC$ liegt auf $\overline{PM}$

Wir zeichnen von A aus eine Normale auf $\overline{BC}$. Diese schneidet $\overline{PM}$ in H. Wir wollen zeigen, dass H der Höhenschnittpunkt des Dreiecks ABC ist. Wenn man den Höhenschnittpunkt eines Dreiecks an einer Seite spiegelt, dann liegt der gespiegelte Punkt auf dem Umkreis. Der zu H symmetrische Punkt H' ist der Schnittpunkt der Normalen mit $\overline{PD}$. Wir müssen also zeigen, dass dieser Punkt auf dem Kreis liegt.
Der Winkel $AH'D$ beträgt $90° + \epsilon$. Da $\overline{TD}$ parallel zu $\overline{PM}$ ist, ist der Winkel zwischen $\overline{TD}$ und der Tangente t' in T gleich φ, und $\sphericalangle MTD = 90° - \varphi$. Aus Symmetriegründen ist auch $\sphericalangle MFD = 90° - \varphi$. Wenn wir das Dreieck PMF betrachten, sehen wir, dass

$$\sphericalangle PMF = 180° - 2 \cdot \epsilon - (90° - \varphi) = 90° - 2 \cdot \epsilon + \varphi \tag{11}$$

Weiter ist

$$\sphericalangle AMP = 90° - \varphi \tag{12}$$

Daher ist

$$\sphericalangle AMF = 180° - 2 \cdot \epsilon \tag{13}$$

d.h. der Ergänzungswinkel auf 360° beträgt $180° + 2 \cdot \epsilon$. Das ist aber das Doppelte von $\sphericalangle AH'D$, d.h. $\sphericalangle AH'D$ ist der Peripheriewinkel zum Zentriwinkel AMF. H' liegt daher auf dem Kreis, und daraus folgt, wie oben gezeigt, dass Höhenschnittpunkt des Dreiecks ABC auf $\overline{PM}$ liegt.

6 Verallgemeinerte Aufgabenstellung, Teil I

von Wolfgang Kirschenhofer und Rainer Rosenthal

6.1 Aufgabenstellung III: Maximales Dreieck im Kreis

Aufgabenstellung von *Rainer Rosenthal* im Juni 2004 in d.s.m. :
Punkt A liege auf dem Kreis k. P sei ein beliebiger Punkt in der Ebene. Bestimme die Punkte B und C auf dem Kreis derart, dass P auf der Geraden $g(B, C)$ liegt und die Fläche von Dreieck ABC maximal ist.

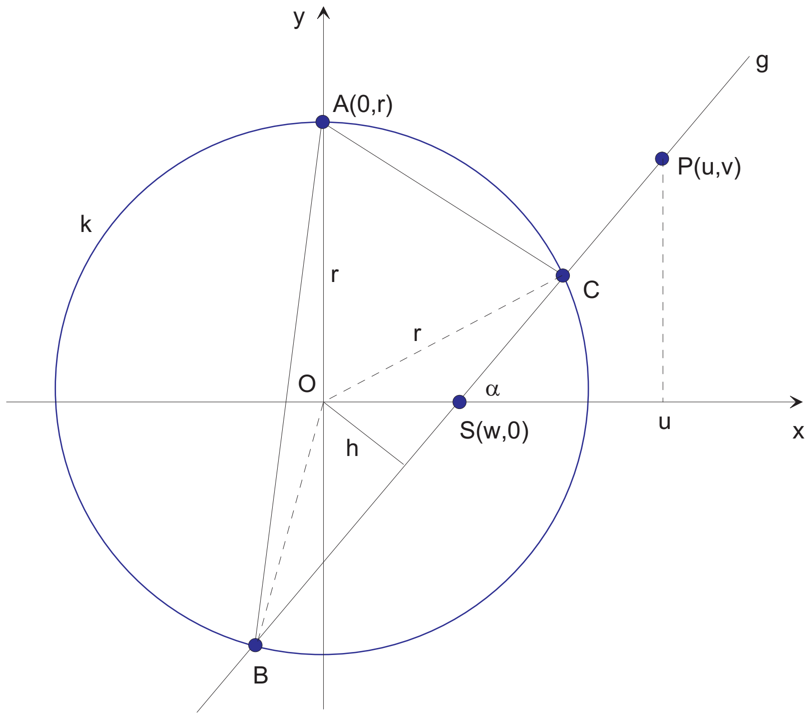


Abbildung 23: Skizze zur verallgemeinerten Aufgabenstellung

Der Kreis k mit Radius r habe seinen Mittelpunkt im Ursprung O. Es sei Punkt $A(0, r)$ und $P(u, v)$. Aus Symmetriegründen, kann man sich auf $u > 0$ beschränken.
M, r, A, P sind fest vorgegeben. Wir betrachten nur solche Geraden g durch P, welche den Kreis k in zwei Punkten B und C schneiden. Wir beachten auch den Fall, in dem $A = B$ ist, d.h. in welchem der Flächeninhalt F des Dreiecks ABC gleich Null ist.
Gesucht ist jene Gerade g durch P, für welche der Flächeninhalt $F(ABC)$ des Dreiecks ABC maximal wird. Jede Gerade g durch P ist entweder zur x-Achse parallel (einschließlich der x-Achse selbst) oder sie schneidet die x-Achse in einem Punkt. Wir unterscheiden daher 2 Fälle:

1.Fall: Die Gerade g durch P ist zur x-Achse parallel.
Jede dieser Geraden, die den Kreis k in den zwei Punkten B, C schneidet, erzeugt ein gleichschenkliges Dreieck ABC mit $\overline{AB} = \overline{AC}$. Unter diesen gleichschenkligen Dreiecken hat bekanntlich das gleichseitige den maximalen Flächeninhalt. Dieser Fall kann daher nur eintreten,

wenn

$$v = -\frac{r}{2} \tag{1}$$

ist. Und das gleichseitige Dreieck ABC hat dann die Seitenlänge

$$a_{max} = r \cdot \sqrt{3} \tag{2}$$

und den Flächeninhalt

$$F_{max} = \frac{3\sqrt{3}\,r^2}{4} \tag{3}$$

In den Fällen $v \neq -r/2$ wird das Dreieck ABC maximalen Flächeninhalts von einer Gerade g erzeugt, welche die x-Achse in einem Punkt $S(w, 0)$ schneidet.

2.Fall: Die Gerade g schneidet die x Achse in einem Punkt $S(w, 0)$, $\quad v \neq -r/2$

Wir bestimmen jenes w, für welches $F(ABC)$ maximal wird. Sei α der Schittwinkel von g mit der $+x$ Achse, mit $-90° \leq \alpha \leq +90°$ Den Normalabstand des Mittelpunktes O bezeichne wir mit h. Für den Flächeninhalt des Dreiecks gilt dann:

$$F(w, r, u, v) = \sqrt{r^2 - h^2} \cdot (r\,\cos\alpha + h), \quad h = w \cdot \sin\alpha \tag{1}$$

Nun gilt aber weiter:

$$\tan\alpha = \frac{|v|}{|u - w|} \cdot sign(w) \tag{2}$$

Aus (2) erhält man dann $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$. Setzt man dies in (1) ein, ergibt sich schließlich:

$$F(w, r, u, v) = \frac{\sqrt{r^2 \cdot (v^2 + (u - w)^2) - v^2 \cdot w^2} \cdot (r \cdot |u - w| + v \cdot w)}{v^2 + (u - w)^2} \tag{3}$$

Weiters gilt:

$$\alpha = \arctan\left(\frac{|v|}{|u - w|} \cdot sign(w)\right) \cdot \frac{180°}{\pi} \tag{4}$$

Die Stelle w des Maximums von F ermitteln wir dadurch, daß wir F nach w ableiten und die Ableitung Null setzen. Man erhält dann die Gleichung vierten Grades, die man dann noch weiter vereinfachen kann.

a) Es sei $v \neq r$:
In diesem Fall kann auch $A = B$ und damit $F = 0$ sein. Dies ist genau für

$$w = \frac{u \cdot r}{r - v} \tag{5}$$

der Fall, wie man mit Hilfe des Strahlensatzes feststellt. Nun ist auch

$$F'\left(\frac{u \cdot r}{r - v}, r, u, v\right) = 0 \tag{6}$$

d.h. es liegt ein lokales Minimum mit dem Wert F=0 vor, d.h. dies ist gleichzeitig das absolute Minimum von F. Es ist daher die Gleichung vierten Grades durch

$$w - \frac{u \cdot r}{r - v} \tag{7}$$

teilbar und man erhält nach der Divisison schließlich folgende Gleichung 3.Grades:

$$\begin{aligned} G_3(w,r,u,v) = w^3\, u\,(r^2 + r\,v - 2\,v^2) + \\ w^2\,(r^3\,v - r^2\,(3\,u^2 + v^2) - 2\,r\,v\,(u^2 + v^2) + 2\,v^2\,(u^2 + v^2)) - \\ w\,r\,u\,(2\,r^2\,v - 3\,r\,(u^2 + v^2) - v\,(u^2 + v^2)) + \\ r^2\,(u^2 + v^2)\,(r\,v - u^2 - v^2) \end{aligned}$$

Aus den drei Lösungen wählt man dann jene aus, für welche F maximal ist. Ein Beispiel dazu - wir wählen:

$$r = u = 1, \qquad v = -1 \tag{8}$$

Die Lösungen von $G_3(w, 1, 1, -1)$ sind näherungsweise:

$$w_1 = -1.58551489, \quad w_2 = 0.8442084, \quad w_3 = 2.241306 \tag{9}$$

Das Einsetzen in F zeigt, daß $w_{max} = w_1 = -1.58551489$ ist.

$$F(w_{max}, 1, 1, -1) = 1.2342249, \qquad \alpha_{max} = -21.14498° \tag{10}$$

b) Es sei $v = r$ Dies ist der Fall der Aufgabenstellung II. In diesem Fall wird aus der ursprünglichen Gleichung 4.Grades eine Gleichung zweiten Gardes :

$$G_2(w,r,u) = 0, \quad G_2(w,r,u) = w^2\,3\,u - w\,2\,(r^2 + 2\,u^2) + u\,(r^2 + u^2) \tag{11}$$

Sie hat die beiden Lösungen:

$$w_1 = \frac{r^2 + 2\,u^2 - \sqrt{r^4 + r^2\,u^2 + u^4}}{3\,u}, \quad w_2 = \frac{r^2 + 2\,u^2 + \sqrt{r^4 + r^2\,u^2 + u^4}}{3\,u} \tag{12}$$

Es gilt: $w_{max} = w_1$. Zwei Beispiel dazu:
1.) $r = u = v = 1$

$$w_{max} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad F_{max} = \frac{\sqrt{\sqrt{108}}}{4} \approx 0.805927, \quad \alpha_{max} = 60° \tag{13}$$

2.) $r = v = 4$, $u = 5$

$$w_{max} \approx 2.013929, \quad F_{max} \approx 14.664437, \quad \alpha_{max} \approx 53.258° \tag{14}$$

7 Verallgemeinerte Aufgabenstellung Teil II

von Rainer Rosenthal, Jutta Gut und Philippe

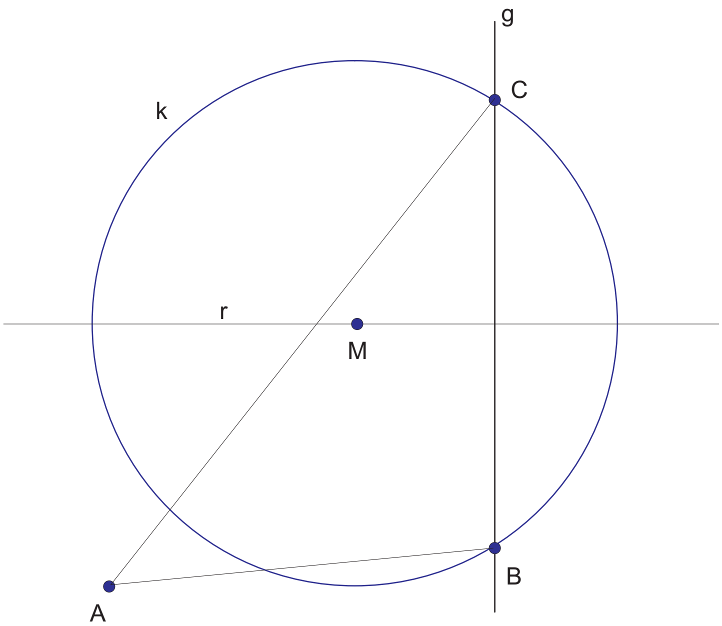


Abbildung 24: Skizze zur verallgemeinerten Aufgabenstellung, Teil II

Wir interessieren uns für Dreiecke ABC, deren Ecken B und C - aber nicht notwendig auch A - auf dem Kreis $k(M, r)$ liegen. Die Verbindungsgerade BC wollen wir stets mit g bezeichnen. Es soll untersucht werden, wie die Fläche von ABC maximiert werden kann bei vorgegebenem Punkt A.

7.1 Aufgabe [FreeMax] ohne weitere Einschränkungen

Welche Lage hat g, wenn area(ABC) maximal ist?

7.2 Aufgabe [RestrictedMax] mit einer Einschränkung

Welche Lage hat g, wenn nicht nur area(ABC) maximal sein soll sondern g auch durch einen vorgegebenen Punkt P gehen soll?

7.3 Die Verwendung des Begriffs *unendlich ferner Punkt*

Es ist klar, dass die Lösung g für [FreeMax] eine zu AM senk- rechte Gerade sein muss. Sie geht also durch den unendlich fernen Punkt P, der zur Richtung senkrecht zu AM gehört. Mit dieser Vorgabe für P erscheint also die Aufgabe [FreeMax] als spezielle Form von [RestrictedMax].

7.4 Eine Tabelle zur Klassifikation der Aufgabe [RestrictedMax]

Fall Nr.	A liegt auf Kreis k	P ist unendlich fern	AP Tangente an Kreis k
0	ja	ja	ja
1	ja	ja	nein
2	ja	nein	ja
3	ja	nein	nein
4	nein	ja	-
5	nein	nein	-

Die Originalaufgaben von Ingmar Rubin stecken hierin als Fall 1 und Fall 2. Der Fall 0 gibt das absolut maximale Dreieck (gleichseitiges Dreieck).

7.5 Definition der *Marginalen*

Es war eine glückliche Idee, die Aufgabe [FreeMax] gesondert zu behandeln und den Begriff *Marginale* (mit den Buchstaben von *Ingmar*:-) zu prägen, weil sich damit leichter über die Aufgabe [RestrictedMax] sprechen lässt.
Definition Die Gerade g, die zu gegebenem Punkt S die Fläche area(SBC) maximiert, heisst Marginale von S.

Es wurde ausführlich über diese Marginale diskutiert und sie kann elementar konstruiert werden. Sie besitzt zudem eine sehr interessante Eigenschaft: Ist G der Pol von g, dann liegen S und G spiegelbildlich zu g.

7.6 Die Lösung von [FreeMax]

Aus der Definition der Marginalen folgt für [FreeMax] sofort: **Satz** Die Gerade g ist die Marginale von A.

7.7 Die Lösung von [RestrictedMax]

7.7.1 Lösung für Fall 1

Tatsächlich wurde die Marginale erfunden auf der Suche nach der Lösung für [RestrictedMax]1. Wir hatten auf der Geraden PA (also der Geraden durch mit der vorgegebenen Richtung) den Punkt S markiert, für den SM senkrecht zu PA steht. Dann ist die Marginale dieses Punktes S die gesuchte Gerade g.

7.7.2 Lösung für Fall 2 und alle anderen(!)

Es ist Philippes wunderbarer Einsicht zu verdanken, dass die Lösung 1 so formuliert werden kann, dass sie auch für alle Fälle von [RestrictedMax] gültig ist:
Satz Philippe1 Suche den Punkt S auf PA, dessen Marginale durch P geht. Diese Marginale ist das gesuchte g.

7.8 Konstruktionen die Aufgabe [RestrictedMax]

Satz Philippe2 Die Gerade g halbiert den Winkel zwischen $|PA|$ und $|PG|$, wobei G der Pol von g ist.

7.9 Konstruktion des Marginalenpunktes S bei gegebener Marginale

von Jutta Gut, Wien

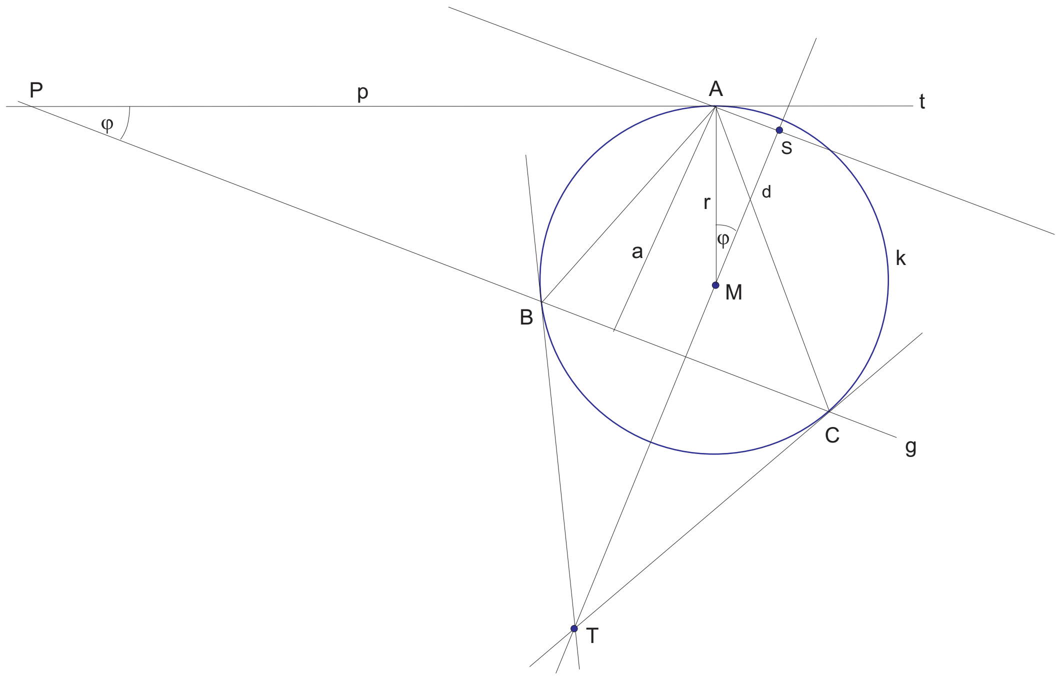


Abbildung 25: Die Marginale teilt die Verbindungsgerade SG in der Mitte

Wir erinnern uns nocheinmal an die Definition der Marginalen, welche als Lösung zur Aufgabenstellung 1 entstanden war:
Die Gerade g, die zu gegebenem Punkt S die Fläche $area(SBC)$ maximiert, heisst Marginale von S mit der Eigenschaft: Ist G der Pol von g, dann liegen S und G spiegelbildlich zu g.
Umgekehrt kann man zu einer beliebigen Geraden g den *Marginalpunkt* S definieren als den Punkt, für den g die Marginale ist. Die Konstruktion ist nach dem obigen klar: Man spiegelt den Pol von g an g. Allerdings ergibt die Konstruktion nur dann ein maximales Dreieck, wenn g vom Kreismittelpunkt M höchstens den Abstand $r/\sqrt{2}$ hat. Für

$$\frac{r}{\sqrt{2}} < |gM| \leq r \tag{1}$$

liegt der Marginalpunkt auf derselben Seite vom M wie die Gerade, der Flächeninhalt des entsprechenden Dreiecks hat daher nur ein lokales Maximum. Und wenn g auerhalb des Kreises liegt, haben wir keinen Schnittpunkt und kein Dreieck. Wenn jetzt die Gerade g um einen festen Punkt P rotiert, beschreibt der Marginalpunkt S eine Kurve, die man folgendermaen konstruieren kann:

```
- zeichne durch M eine Normale auf g,
- der Schnittpunkt Q mit g ist der Halbierungspunkt der Sehne,
- der Pol R von g ist der Schnittpunkt derselben Normalen mit der Polare von g,
- wenn wir R an Q spiegeln, erhalten wir S.
```

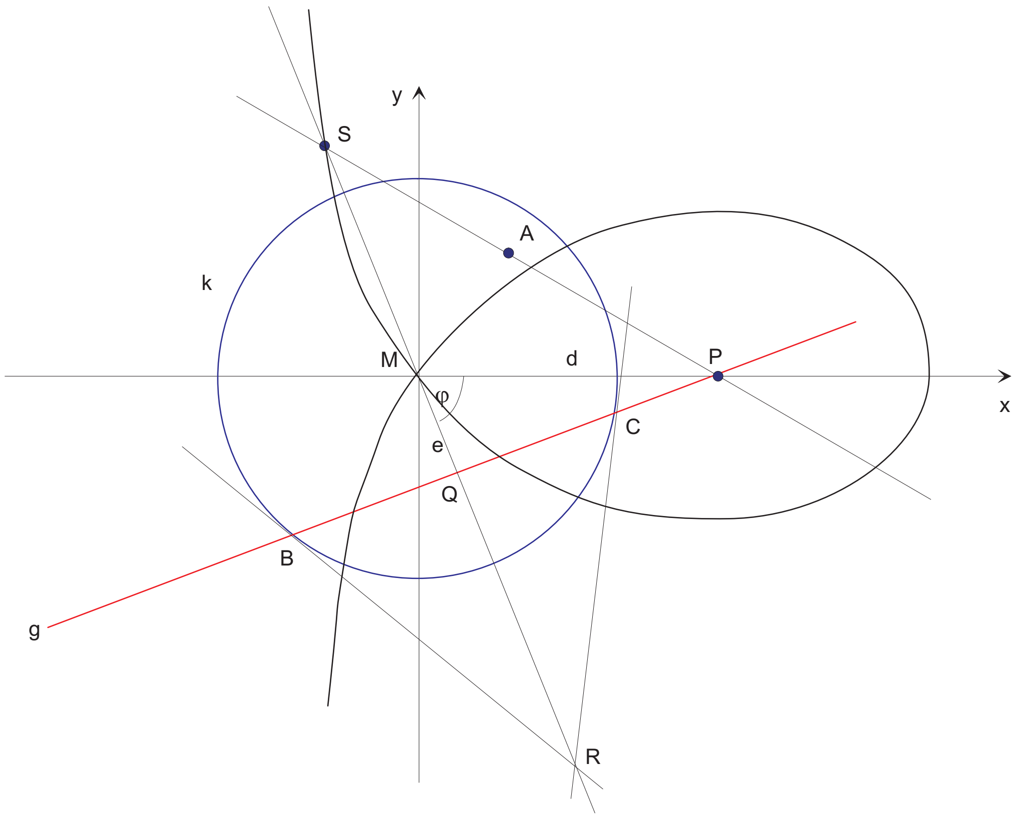


Abbildung 26: Der Marginalenpunkt S liegt auf einer Kurve 3.Ordnung

Wenn wir den Kreismittelpunkt M in den Koordinatenursprung und P auf die positive x-Achse legen, ist

$$MQ = d \cdot \cos\varphi, \quad MR = \frac{e}{\cos\varphi}, \quad d = MP, \quad e = \frac{r^2}{d} \tag{2}$$

Dabei ist e der Abstand der Polaren g von M und φ der Winkel zwischen MQ bzw. MR und der x-Achse. Die Gleichung der Kurve lautet daher in Polarkoordinaten

$$MS = 2 \cdot d \cdot \cos\varphi - \frac{e}{\cos\varphi} \tag{3}$$

und in kartesischen Koordinaten

$$e \cdot (x + e) \cdot (x^2 + y^2) = 2 \cdot d \cdot e \cdot x^2 \tag{4}$$

Es handelt sich dabei um eine *Sluzesche Kubik*. Mit der universellen Lösung von Philippe: *Suche den Punkt S auf PA, dessen Marginale durch P geht. Diese Marginale ist das gesuchte g.*
Und mit der *Sluzeschen Kubik* kann man nun S konstruieren!
Wir legen M in den Koordinatenursprung und P auf die positive x-Achse, konstruieren die Kurve

$$e \cdot (x + e) \cdot (x^2 + y^2) = 2 \cdot d \cdot e \cdot x^2 \tag{5}$$

und schneiden sie mit PA. Das ist der Punkt S. Wir brauchen nur den Teil der Kurve ohne die Schlaufe, weil nur dieser Teil der Bedingung $|gM| \leq r/\sqrt{2}$ entspricht. Wenn wir die Verlängerung von SM mit der Polaren von p schneiden, erhalten wir R. Die Symmetrale von SR ist die gesuchte Gerade g.