Aufgabe $\iota\,36$, Wurzel Heft 7 / 02

Dr. Friedhelm Götze, Jena

Lösungsvorschlag von Ingmar Rubin, Berlin

Gegeben sei eine Kugel K mit Radius r. Unter allen geraden Pyramiden mit quadratischer Grundfläche (Grundkante a, Pyramidenhöhe h), welche K so umschließt, dass ihre fünf Begrenzungsflächen die Kugel tangieren finde man jene mit dem kleinsten Rauminhalt.
Man weise außerdem nach, dass genau diese Pyramide unter allen anderen auch die kleinste Oberfläche besitzt. Punktezahl=7

Berechnung des minimalen Volumens

Abbildung 1 zeigt eine Schnittdarstellung durch die Mitte der Pyramide und Kugel.

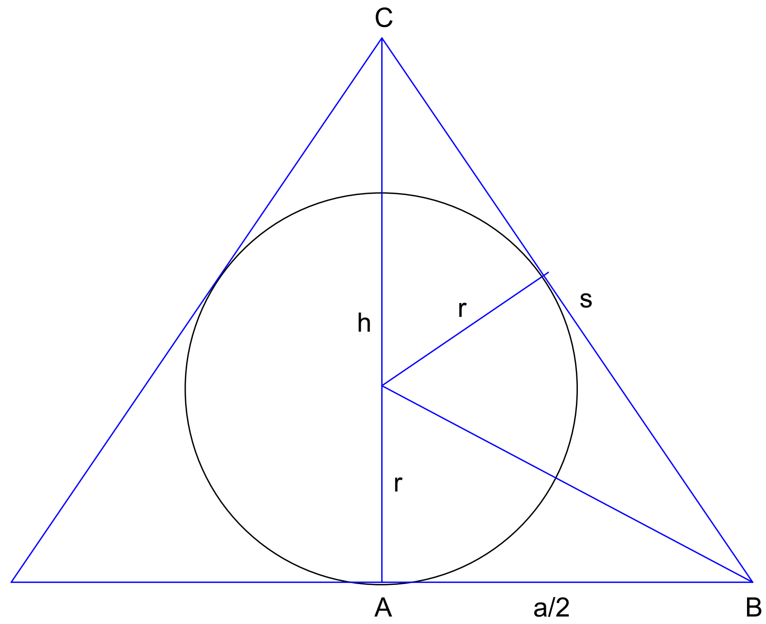

Abbildung 1: Schnitt duch die Pyramide mit Kugel

Als Streckenbezeichner wurden gewählt :

$$\overline{AB} = \frac{a}{2}, \qquad \overline{BC} = s, \qquad \overline{AC} = h \tag{1}$$

Das Volumen der Pyramide mit quadratische Grundfläche beträgt:

$$V = \frac{A_G\, h}{3} = \frac{a^2\, h}{3} \tag{2}$$

Aus dem *Satz des Pythagoras* folgt im rechtwinkligen Dreieck ABC:

$$h^2 + \frac{a^2}{4} = s^2 \tag{3}$$

Der Flächeninhalt vom Dreieck ABC berechnet sich aus :

$$A = \frac{h\, a}{4} = \frac{s\, r}{2} + \frac{r\, a}{4} \quad \rightarrow \quad s = \frac{a\,(h-r)}{2\, r} \tag{4}$$

Wir setzen nun (4) in (3) ein und lösen nach h auf :

$$h = \frac{2\, a^2\, r}{a^2 - 4\, r^2}, \tag{5}$$

Das Ergebnis setzen wir in die Volumengleichung (2) ein, und erhalten die Funktion $V = V(a, r)$:

$$V(a, r) = \frac{2\, a^4\, r}{3\,(a^2 - 4\, r^2)} \tag{6}$$

Für die weiter Berechnung des Minimums benotigen wir die erste und zweite Ableitung nach a :

$$V' = \frac{4\,a^3\,r\,(a^2-8\,r^2)}{3\,(a^2-4\,r^2)^2}, \quad V'' = \frac{4\,a^2\,r\,(a^4-12\,a^2\,r^2+96\,r^4)}{3\,(a^2-4\,r^2)^3} \tag{7}$$

Schließlich bestimmen wir die Nullstellen der ersten Ableitung :

$$V' = 0 \quad \rightarrow \quad a_1 = 0, \quad a_2 = -2\sqrt{2}\,r, \quad a_3 = 2\sqrt{2}\,r \tag{8}$$

Für die Lösung der Aufgabe muß $a > 0$ sein, weshalb als einzig sinnvolle Lösung a_3 in Frage kommt. Zur Überprüfung auf Maximum / Minimum setzen wir a_3 in die zweite Ableitung ein :

$$V''(a_3) = \frac{32\,r}{3} > 0 \quad \rightarrow \quad Minimum \tag{9}$$

Für a, h und V_{min} ergeben sich dann :

$$a = 2\sqrt{2}\,r, \qquad h = 4\,r, \qquad V_{min} = \frac{32\,r^3}{3} \tag{10}$$

Berechnung der minimalen Oberfläche

Die Oberfläche der geraden Pyramide mit quadratischer Grundfläche beträgt :

$$A_o = a^2 + 2\,a\,s \tag{11}$$

Aus dem Satz der Pytagoras und den Flächengleichungen vom Dreieck ABC erhielten wir :

$$h^2 + \frac{a^2}{4} = s^2, \qquad s = \frac{a\,(h-r)}{2\,r} \tag{12}$$

Beide Gleichungen werden nach a, s aufgelöst :

$$a = \frac{2\sqrt{h}\,r}{\sqrt{h-2\,r}}, \qquad s = \frac{\sqrt{h}\,(h-r)}{\sqrt{h-2\,r}}, \tag{13}$$

Nach dem Einsetzen in (11) ergibt sich :

$$A_o = a^2 + 2\,a\,s = \frac{4\,h^2\,r}{h-2\,r} \tag{14}$$

Berechnug der ersten und zweiten Ableitung nach h :

$$A_o{}' = \frac{4\,h\,(h-4\,r)\,r}{(h-2\,r)^2}, \qquad A_o{}'' = \frac{32\,r^3}{(h-2\,r)^3} \tag{15}$$

$$A_o{}' = 0 \quad \rightarrow \quad h_1 = 0, \quad h_2 = 4\,r \tag{16}$$

Einsetzen von h_2 in die zweite Ableitung ergibt:

$$A_o(h_2)'' = \frac{32\,r^3}{(4\,r-2\,r)^3} = \frac{32\,r^3}{8\,r^3} = 4 > 0 \quad \rightarrow \quad Minimum \tag{17}$$

Für a, h und A_o ergeben sich :

$$a = 2\sqrt{2}\,r, \qquad h = 4\,r, \qquad A_o = 32\,r^2 \tag{18}$$

Diese Pyramide ist identisch mit den Abmaßen der Pyramide mit minimalen Volumen.