Maschendrahtzaun I

Eine Aufgabe von Gerhard Wöginger

Newsgroup *de.rec.denksport*

Wir haben genau $100\,m$ Maschendrahtzaun zur Verfügung, um eine Weide einzuzäunen. Unser Zaun muss an der grossen Eiche E anfangen und enden. Alles Land, das mindestens $20\,m$ nördlich von der Eiche liegt, ist $200\,Euro/m^2$ wert. Das restliche Land ist $100\,Euro/m^2$ wert.
Wie muss der Zaun verlaufen, so dass die eingeschlossene Weideflaeche den größstmöglichen Wert hat?

Ergänzungen: Die 'Eiche' ist ein Punkt E in der Ebene. Das 'Land $20\,m$ nördlich von der Eiche' ist das Land nördlich von einer Ost-West Geraden. Der 'Zaun' ist eine Kurve der Laenge 100. Alles spielt sich in der Ebene ab. (Punktezahl=10)

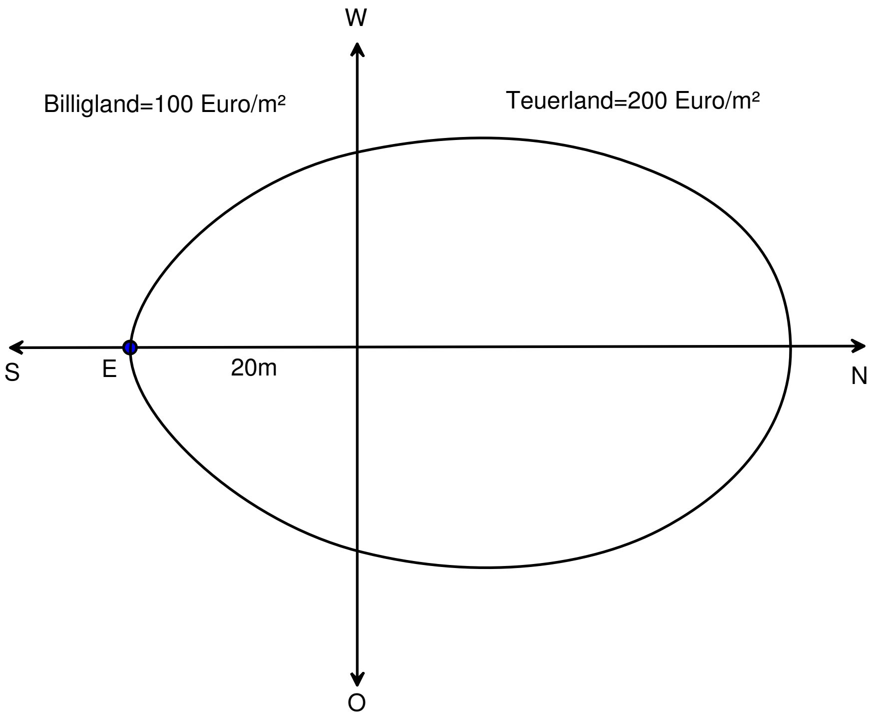

Abbildung 1: Skizze zur Aufgabenstellung

Anmerkung zum Ursprung der Aufgabe

Das englische Original wurde von *Vladimir Sedach* als Monatsrätesl März 2003 auf der IBM-Challenge Seite gestellt:

Ponder This Challenge:
This month's puzzle was supplied by Vladimir Sedach.

We have 100 meters of fencing, which we use to enclose a pasture. Our fence must begin and end at the oak tree. Ground south of the oak tree, or less than 20 meters north of the oak tree, is worth \$100 per square meter; but ground more than 20 meters north of the oak tree is worth \$200 per square meter.

What shape maximizes the total value of the enclosed pasture, and what is this value?

Clarifications:
The 'oak tree' is a single point. '20 meters north' refers to an east-west line passing 20 meters north of the tree. 'Begin and end at the oak tree' means that both ends of the fence touch this point. All of this takes place on a flat Earth.

Lösungsweg

Vorbemerkung

Die Lösungswege zu dieser Aufgabe wurden in der Newsgroup *de.rec.denksport* im Zeitraum vom 7.März bis 18.März 2003 intensiv diskutiert. Anteil daran hatten die Mathematikfreunde:

- Rainer Rosenthal
- Alfred Flaßhaar
- Thomas Luehmann
- Kari Bonanza
- Konrad Schultz und
- Werner Baer

Lösungsansatz mittels Variationsrechnung

Wie Alfred Flaßhaar bemerkt, kann diese Aufgabe grundsätzlich mit den Methoden der *Variationsrechnung* gelöst werden :
Die Aufgabe läßt sich als isoperimetrisches Problem formulieren. Vorauszusetzen ist 'nur', daß die Lösung symmetrisch zur Lotgeraden durch E auf die Grenzgerade ist. Hierfür gibt es logische Hinweise, denn wenn es eine unsymmetrische Lösung gibt, dann ist auch die spiegelbildlich zur Lotgeraden gelegene Fläche eine Lösung mit Maximumeigenschaft (Preis). Bei stetiger Variation der 'dazwischen' liegenden Flächen mit gleichem Umfang und gemeinsamen Punkt E kann es keine Fläche mit größerem Preis geben, andernfalls wähle ich diese als eine der Zwillingsflächen usw. Gäbe es eine unsymmetrische Grenzlage, dann besteht ein Widerspruch, weil das Verfahren fortgesetzt werden kann (alles hier recht grob formuliert).
Mit Rainers Graphik erhält man für den Preis der Fläche ein Funktional F, bestehend aus der Summe zweier bestimmter Integrale (das erste von E bis zur Grenze, das zweite von dort bis zum unbekannten Endpunkt als Umkehrpunkt des Zaunes). Nebenbedingung G ist die konstante Zaunlänge, also auch die Summe bekannter bestimmter Integrale. Außerdem sind Start-, Grenz- und Umkehrpunkt als Randbedingungen formulierbar. Damit sind aber die Eulerschen Gleichungen für das Funktional $H = F + \lambda \cdot G$ berechenbar.
Eine stark vereinfachte aber im Prinzip analoge Aufgabe findet man bei Smirnow, Teil IV, Seite 188.
Die Aufgabe läßt sich auch ohne die Symmetrie als isoperimetrisches Problem formulieren. Nur sind dann vier Funktionen zu bestimmen, vielleicht sind die Gleichungen aber freundlich und geben Symmetriehinweise.

Erster Lösungsansatz: Dreieck und Kreisbogen

Als erst Lösungsfigur wurde ein gleichschenkliges Dreieck mit aufgesetztem Kreissegment nach Abbildung 2 angenommen. Die zu optimierende Größe ist

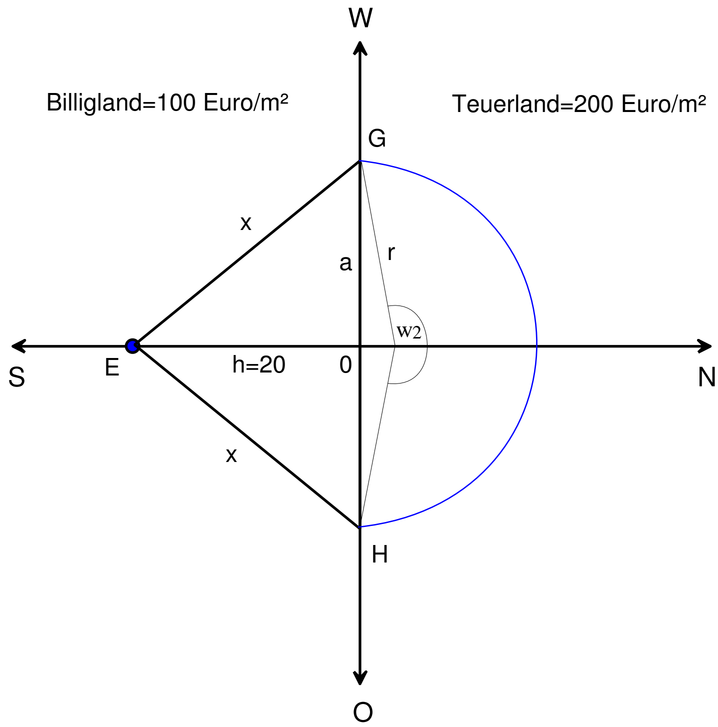

Abbildung 2: Skizze zum ersten Lösungsansatz

der Öffnungswinkel w_2 über dem Kreisbogen. Die Seite $x = \overline{EG}$ berechnet sich nach dem Pythagoras zu :

$$x = \sqrt{h^2 + a^2} \tag{1}$$

Die Sehnenlänge $\overline{HG}$ über dem Kreisbogen beträgt:

$$\overline{HG} = 2\,a = 2\,r_2 \sin\left(\frac{w_2}{2}\right) \quad \rightarrow \quad r_2 = \frac{a}{\sin\left(\frac{w_2}{2}\right)} \tag{2}$$

Die Länge vom Kreisbogen beträgt:

$$s = w_2\,r_2 = \frac{w_2\,a}{\sin\left(\frac{w_2}{2}\right)} \tag{3}$$

Die Länge vom Weidenzaum ist nach Aufgabenstellung auf $u = 100\,m$ begrenzt:

$$u = 2\,x + s = 2\,\sqrt{h^2 + a^2} + \frac{w_2\,a}{\sin\left(\frac{w_2}{2}\right)} = 100 \tag{4}$$

Dreiecksfläche:

$$\triangle EGH : \quad A_1 = h\,a, \tag{5}$$

Fläche vom Kreisbogensegment:

$$A_2 = \frac{(r_2)^2\,(w_2 - \sin(w_2))}{2} = \frac{a^2\,(w_2 - \sin(w_2))}{(1 - \cos(w_2))} \tag{6}$$

Der Wert der Weidefläche berechnet sich zu:

$$W = 100\,A_1 + 200\,A_2 = 100\,a\,h + 200\,\frac{a^2\,(w_2 - \sin(w_2))}{(1 - \cos(w_2))} \tag{7}$$

Gleichung (4) wird nach a aufgelöst:

$$a = \frac{u\,w_2\,\csc\left[\frac{w_2}{2}\right] - 2\,\sqrt{-4\,h^2 + u^2 + h^2\,w_2{}^2\,\csc\left[\frac{w_2}{2}\right]^2}}{-4 + w_2{}^2\,\csc\left[\frac{w_2}{2}\right]^2} \tag{8}$$

und in (7) eingesetzt. Wir erhalten eine Funktion $W = W(w_2)$. Mit den bekannten Methoden der Differentialrechnung bestimmen wir das lokale Maximum zu :

$$w_2 = 3.58824 \to 205.591^\circ, \quad a = 13.9293\,m, \quad W_{max}(w_2) = 109884\,EURO \tag{9}$$

Rainer Rosenthal hat entdeckt, das diese Lösung für das gestellte Problem nicht optimal ist :
Die bisherigen Beiträge gehen von der Vorstellung aus, daß das eingezäunte Gebiet südlich der Trennlinie ein Dreieck sein müsse. Das ist aber nur richtig, wenn das südlich Gebiet nichts kostet. Wenn es nur wenig weniger kostet als das Norgebiet, wird die Lösung eine Beinahe-Kreisfläche sein, nur daß die Krümmung im Süden ein wenig kleiner ist als im Norden. Man gehe also besser von einem gleichschenkligen Dreieck aus, dessen Spitze die Eiche ist und dessen Basis auf der Grenzlinie liegt. Jede der drei Seiten ist durch einen Kreisabschnitt zu ersetzen. Unbekannt sind die Basislänge und die beiden Krümmungsradien im billigen Land und im teuren Land.

Optimale Lösung aus drei Kreisbögen

nach einer Idee von Rainer Rosenthal

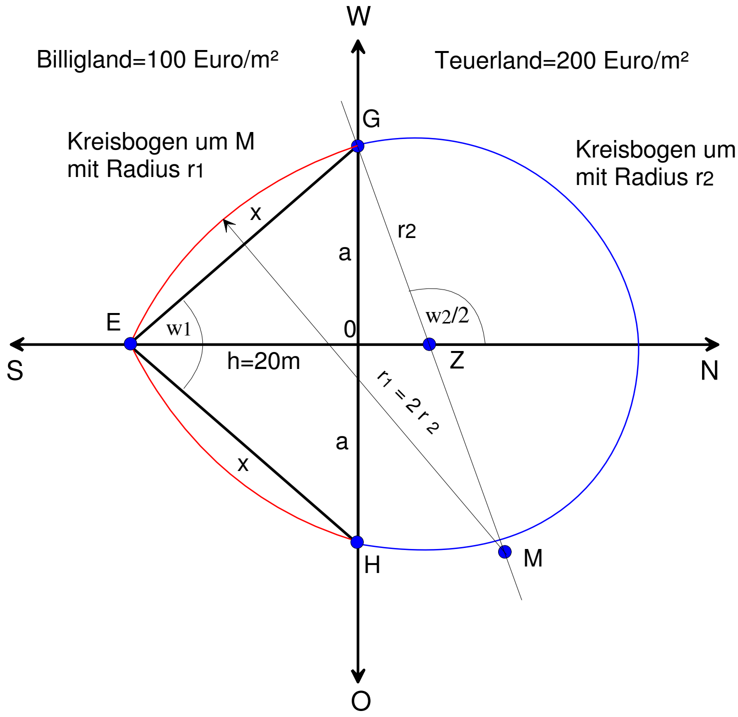

Abbildung 3: Skizze zum optimalen Lösungsweg

Es gibt zwei bis drei Basis-Prinzipien, auf denen die Kreisbogen-Lösung beruht.
Prinzip 0: *Kreisbögen sind die Linien, die die maximale Fläche über einer gegebenen Strecke einschliessen.*
Nach diesem sehr allgemeinen Prinzip, das direkt aus der bekannten isoperimetrischen Eigenschaft des Kreises hergeleitet ist, habe ich noch zwei Prinzipien, die mit der konkreten Aufgabe direkt zusammenhängen.
Prinzip 1: *Die Kreisbögen stossen an der Grenze mit gleicher Tangente zusammen, d.h. Grenzpunkt G und Krümmungskreiszentren Z und M liegen auf einer Geraden. Oder anders formuliert: die Figur, die vom Zaun berandet wird, ist konvex und hat keine Ecke bei G.*
Dies Prinzip ist nicht selbstverständlich (für die Eiche E stimmt es ja auch nicht, wie aus der Begründung auch klar wird.) Für die Rechnung ist es natürlich sehr sehr hilfreich.
Prinzip 2: *Die Krümmungsradien verhalten sich umgekehrt proportional zu den Preisen, d.h. die Krümmung selbst ist den Preisen im jeweiligen Land proportional.*
Diese Annahme folgt aus der Maximallösung der Aufage, wonach sich tasächlich die Flächenpreise und Radien zueinander umgekehrt proportional verhalten. Es müßte allerdings ein allgemeiner Beweis dieser Annahme erbacht werden, wo-

nach man das Verhältnis der Radien bei Vorgabe eines allgemein Preisverhältnis berechnet.
Wir wollen nun die optimalen Winkel w_1, w_2 in Abbildung 3 bestimmen. Dazu werden folgende Bezeichner vereinbart:

- $h = EO = 20$
- r_1 Radius über $x = EG$
- r_2 Radius über $y = 2\,a = GH$
- w_1, w_2 Öffnungswinkel der Kreisbögen
- s_1, s_2 Länge der Kreisbögen

Im Dreieck EGO gilt:

$$x = \sqrt{h^2 + a^2} \tag{10}$$

Länge der Kreisbögen über x und y :

$$s_1 = r_1\, w_1, \qquad s_2 = r_2\, w_2 \tag{11}$$

Weiterhin ist

$$x = 2\, r_1 \sin\left(\frac{w_1}{2}\right); \quad y = 2\, r_2 \sin\left(\frac{w_2}{2}\right) \tag{12}$$

Da die Länge vom Zaun konstant $u = 100\,m$ beträgt lautet die Bedingung

$$u = 2\, s_1 + s_2 \quad \to \quad u = \frac{x\, w_1}{\sin(w_1/2)} + \frac{y\, w_2}{2\,\sin(w_2/2)} \tag{13}$$

oder

$$u = \frac{\sqrt{h^2 + a^2}\, w_1}{\sin(w_1/2)} + \frac{a\ w_2}{\sin(w_2/2)} \tag{14}$$

Bei gegebenem w_1, w_2 lässt sich hieraus a errechnen. Jetzt zu den Flächenberechnungen - es gibt die vier Flächen A_1, A_2, A_3 und A_4. Fläche des Dreiecks

$$\triangle EGH : \quad A_1 = \frac{1}{2}\, h\, y = h\, a \tag{15}$$

Kreisbogensegment über $EG = EH = x$:

$$A_2 = A_3 = \frac{(r_1)^2\, (w_1 - \sin(w_1))}{2} \tag{16}$$

Kreisbogensegment über $GH = y$:

$$A_4 = \frac{(r_2)^2\, (w_2 - \sin(w_2))}{2} \tag{17}$$

Eingesetzt und umgeformt:

$$A_2 = A_3 = \frac{x^2\, (w_1 - \sin(w_1))}{4\,(1 - \cos(w_1))}, \quad A_4 = \frac{y^2\, (w_2 - \sin(w_2))}{4\,(1 - \cos(w_2))}, \tag{18}$$

und weiter

$$A_2 = A_3 = \frac{(h^2 + a^2)\,(w_1 - \sin(w_1))}{4\,(1 - \cos(w_1))}, \quad A_4 = \frac{a^2\,(w_2 - \sin(w_2))}{(1 - \cos(w_2))}, \tag{19}$$

Nun werden die Flächeninhalte mit den Bodenpreisen bewertet :

$$W = 100 \cdot (A_1 + A_2 + A_3) + 200 \cdot A_4 \rightarrow max \tag{20}$$

$$W = 100 \cdot \left(a\,h + \frac{\sqrt{h^2 + a^2}\,(w_1 - \sin(w_1))}{2\,(1 - \cos(w_1))} \right) + 200 \cdot \left(\frac{a^2\,(w_2 - \sin(w_2))}{(1 - \cos(w_2))} \right) \tag{21}$$

Gleichung (13) wird nach a aufgelöst und in (21) eingesetzt. Wir erhalten dann eine Funktion $W(w_1, w_2)$ mit den zwei Veränderlichen w_1 und w_2. Zur Bestimmung des Maximums müssen die Nullstellen der ersten partiellen Ableitungen bestimmt werden :

$$\frac{\partial W}{\partial w_1} = 0, \qquad \frac{\partial W}{\partial w_2} = 0 \tag{22}$$

Es ist abzusehen, daß die Bestimmung der Nullstellen eine numerische Näherungslösung erforderlich macht, da die Veränderlichen innerhalb von transzendenten Funktionen stehen. Alleine die Auflösung von (13) nach a ergibt den Ausdruck :

$$a = \Bigg(- u\,w_2\,\csc\left[\frac{w_2}{2}\right] + w_1\,\csc\left[\frac{w_1}{2}\right]$$

$$\sqrt{u^2 + \frac{2\,h^2\,{w_1}^2}{-1 + \cos[w_1]} + h^2\,{w_2}^2 \csc\left[\frac{w_2}{2}\right]^2}\Bigg) /$$

$$\left(\frac{2\,{w_2}^2}{-1 + \cos[w_2]} + {w_1}^2 \csc\left[\frac{w_1}{2}\right]^2 \right)$$

Die weitere Rechnung wurde mit Hilfe des Compuetralgebrasystems *Mathematica* durchgeführt. Man erhält folgende Ergebnisse :

$$w_1 = 0.887122 \rightarrow 50.8284°, \quad w_2 = 3.478 \rightarrow 199.275° \tag{23}$$

$$W_{max}(w_1, w_2) = 114257\,Euro \tag{24}$$

$$a = 14.031\,m, \quad x = 24.4309\,m, \quad r_1 = 56.9274\,m, \quad r_2 = 28.4637\,m \tag{25}$$

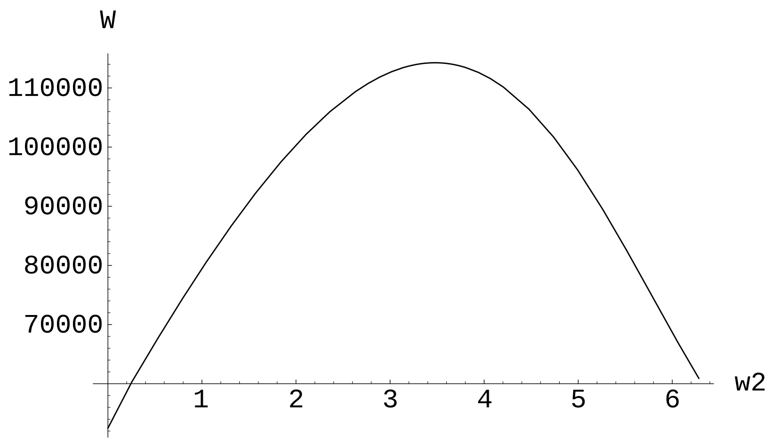

Abbildung 4: Maximum der Funktion $W(w_1, w_2)$ im Intervall $0 \leq w_2 \leq 2\,\pi$