Der Kompressor

Ein Gas soll in einem dreistufigen Kompressor vom Druck p_0 auf den Druck $p > p_0$ komprimiert werden. Der Kompressor ist mit zwei Kühlkammern versehen, die das Gas vor jedem Kompressionsvorgang wieder auf die Ausgangstemperatur bringen.

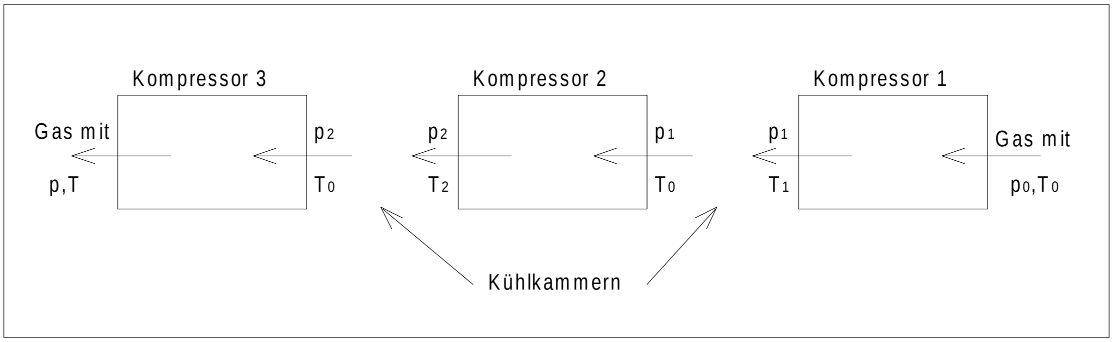

Abbildung 1: dreistufiger Kompressor

Bezeichnet man mit p_1 bzw. p_2 den Druck des Gases nach der 1. bzw. 2. Kompressionsstufe, so gilt für die Kompressionsarbeit je Mol des Gases die Formel:

$$A = f(p_1, p_2) = \frac{R \cdot T_0}{\alpha} \cdot \left[\left[\left(\frac{p_1}{p_0} \right)^{\alpha} - 1 \right] + \left[\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\alpha} - 1 \right] + \left[\left(\frac{p}{p_2} \right)^{\alpha} - 1 \right] \right] \tag{1}$$

Hierbei sind T_0 die absolute Temperatur des Gases vor der Kompression und $\alpha < 1$ eine Konstante, die von der Konstruktion des Kompressors abhängig ist. Wie sind die Drücke p_1 und p_2 zu wählen ($p_0 < p_1 < p_2 < p$) , damit die aufzuwendende Arbeit möglichts klein wird ?

1. Skizziere den zulässigen Bereich B in der p_1, p_2 Ebene !

2. In welchem Punkt $P(p_{10}, p_{20})$ besitzt die Funktion $f(p_1, p_2)$ ein lokales Extremum ? Welche Art von Extremum liegt vor ?

3. Zeige das der Punkt $P(p_{10}, p_{20})$ im Bereich B liegt !

Lösung

Zulässiger Bereich B

Der zulässige Bereich wird von den Geraden p_0, p, $p_1 = p_2$ und er p_2- Achse begrenzt. Die Geraden selbst gehöhren dem Bereich B nicht mehr an, da die Bedingung $p_0 < p_1 < p_2 < p$ lautet.

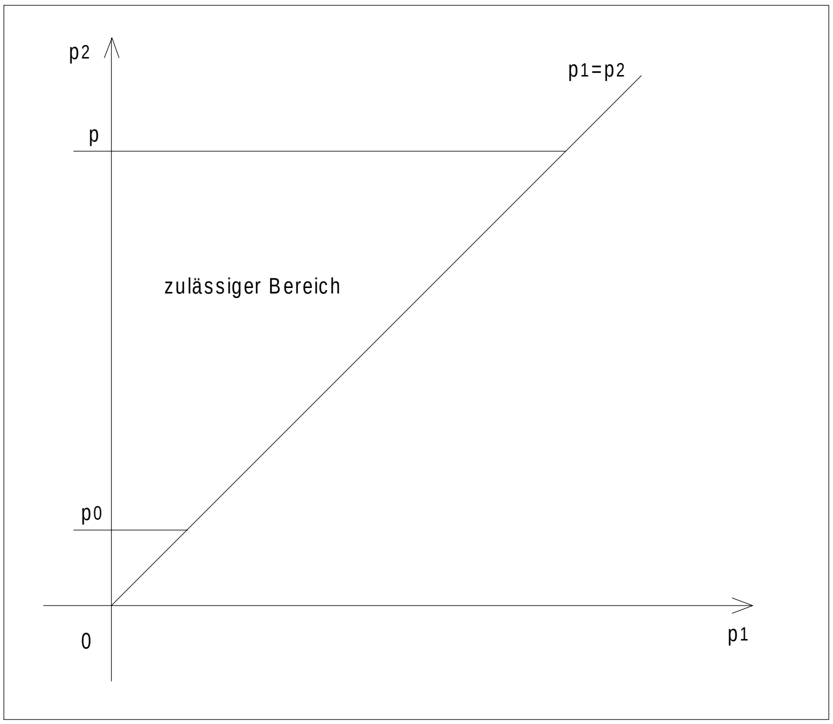

Abbildung 2: Zulässiger Bereich B in der p_1, p_2 Ebene

Lokales Extremmum der Funktion $f(p_1, p_2)$

Für Funktionen mit zwei Veränderlichen lautet die notwendige Bedingung für ein lokales Extremum :

$$\frac{\partial f(p_1,p_2)}{\partial p_1} = 0, \qquad \frac{\partial f(p_1,p_2)}{\partial p_2} = 0 \tag{2}$$

Wir bilden die ersten Ableitungen und bestimmen deren Nullstellen:

$$\frac{\partial f(p_1,p_2)}{\partial p_1} = \frac{RT\left(\frac{\left(\frac{p1}{p0}\right)^{-1+\alpha}\alpha}{p0} - \frac{p2\left(\frac{p2}{p1}\right)^{-1+\alpha}\alpha}{p1^2}\right)}{\alpha}$$

Die Nullstellen der partiellen Ableitung f_{p1} lauten:

$$\{\{p_1 \to -\sqrt{p_0}\sqrt{p_2}\}, \{p_1 \to \sqrt{p_0}\sqrt{p_2}\}\}$$

$$\frac{\partial f(p_1, p_2)}{\partial p_2} = \frac{RT\left(-\frac{p\left(\frac{p}{p2}\right)^{-1+\alpha}\alpha}{p2^2} + \frac{\left(\frac{p2}{p1}\right)^{-1+\alpha}\alpha}{p_1}\right)}{\alpha}$$

Die Nullstelle der partiellen Ableitung f_{p2} lautet:

$$\{\{p_1 \to \frac{{p_2}^2}{p}\}\}$$

Wir fassen die Nullstellen von f_{p1} und f_{p2} zusammen:

$$p_1 = \sqrt{p_0} \cdot \sqrt{p_2} = \frac{(p_2)^2}{p} \quad \to \quad p_{10} = \sqrt[3]{p \cdot p_0^2}, \quad p_{20} = \sqrt[3]{p^2 \cdot p_0} \tag{3}$$

Es muß nun die Art des Extremums überprüft werden. Wir bilden die zweiten partiellen Ableitungen:

$$f_{p1p1} = \frac{RT((\frac{p1}{p0})^{\alpha}(-1+\alpha) + (\frac{p2}{p1})^{\alpha}(1+\alpha))}{{p_1}^2}$$

$$f_{p2p2} = \frac{RT((\frac{p2}{p1})^{\alpha}(-1+\alpha) + (\frac{p}{p2})^{\alpha}(1+\alpha))}{{p_2}^2}$$

$$f_{p1p2} = \frac{RT\left(-\frac{\left(\frac{p2}{p1}\right)^{-1+\alpha}\alpha}{p1^2} - \frac{p2\left(\frac{p2}{p1}\right)^{-2+\alpha}(-1+\alpha)\alpha}{p_1{}^3}\right)}{\alpha}$$

Als hinreichende Bedingung muß der Wert der Funktionaldeterminante Δ an der Stelle $P(p_{10}, p_{20})$ größer Null sein:

$$\mathbf{\Delta} = \begin{bmatrix} f_{p1p1} & f_{p1p2} \\ f_{p2p2} & f_{p2p1} \end{bmatrix} \tag{4}$$

$$\Delta = \frac{1}{p1^2 p2^2}\Big(R^2T^2\Big(-\left(\frac{p2}{p1}\right)^{2\alpha}\alpha^2 + \Big(\left(\frac{p2}{p1}\right)^{\alpha}(-1+\alpha) + \left(\frac{p}{p2}\right)^{\alpha}(1+\alpha)\Big)$$
$$\Big(\left(\frac{p1}{p0}\right)^{\alpha}(-1+\alpha) + \left(\frac{p2}{p1}\right)^{\alpha}(1+\alpha)\Big)\Big)\Big)$$

Die zweite partielle Ableitung f_{p1p1} entscheidet über die Art des Extremums:

$$f_{p1p1}(p_{10}, p_{20}) \quad > \quad 0 \quad \to Minimum \tag{5}$$
$$f_{p1p1}(p_{10}, p_{20}) \quad < \quad 0 \quad \to Maximum \tag{6}$$

Zur weiteren Auswertung legen wird für die Konstanten numerische Werte fest:

$$\alpha = 0.5, \quad T_0 = 1, \quad R = 1, \quad p_0 = 1, \quad p = 10 \tag{7}$$

Damit ergeben sich für die berechneten Größen:

$$p_{10} = \sqrt[3]{p \cdot p_0^2} = 2.15443 \tag{8}$$

$$p_{20} = \sqrt[3]{p^2 \cdot p_0} = 4.64159 \tag{9}$$

$$\Delta(p_{10}, p_{20}) = 0.0161583 \tag{10}$$

$$f_{p1p1}(p_{10}, p_{20}) = 0.316228 \tag{11}$$

Die Werte für p_1 und p_2 liegen im zulässigen Bereich, da die Bedingung $p_0 < p_1 < p_2 < p$ erfüllt ist.

Der Wert der Funktionaldeterminante Δ ist größer Null, womit auch das hinreichende Kriterium für ein lokales Extremum erfüllt ist.

Die zweite Ableitung f_{p1p1} ist größer Null womit es sich um ein lokales Minimum an der Stelle $P(p_{10}, p_{20})$ handelt.

Das Minimum beträgt:

$$f(p_{10}, p_{20}) = 2.8068 \tag{12}$$

Globales Extremum über dem Gebiet B

Zum Abschluß soll das Bild der Funktion $f(p_1, p_2)$ über dem Gebiet B analysiert werden.

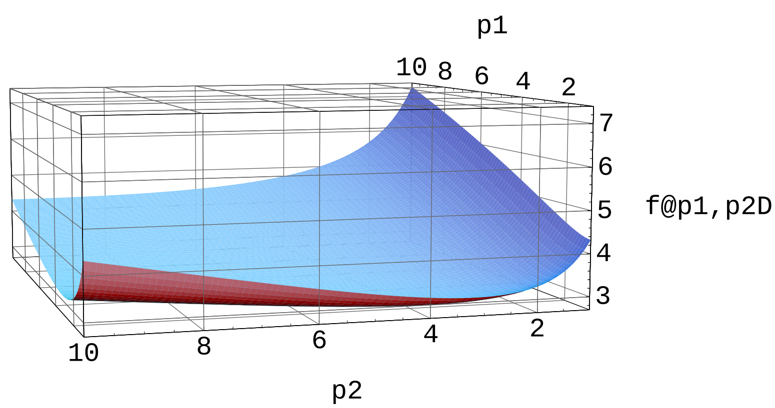

Abbildung 3: Funktionsbild über dem Bereich B

Die Abbildung zeigt das, das lokale Minimum auch globales Minimum über B ist. Alle Funktionswerte außerhalb von $P(2.15, 4.64)$ liegen oberhalb des Minimums bis zum Rand von B.