Ellipse im Halbkreis

Ingmar Rubin, Berlin

18. Juli 2001

Gegeben sei der Kreis k mit dem Radius r und dem Mittelpunkt im Koordinatenursprung $M(0,0)$. In die obere Kreishälfte wird eine Ellipse mit den Halbachsen a, b so gelegt, das die große Halbachse parallel zur x-Achse liegt, und die Ellipse den Kreisdurchmesser tangiert. Das Wertepaar a, b sei so gewählt, das die Ellipse die Kreisperipherie in genau zwei weiteren Punkten berühert.

1. Bestimme das Verhältnis $a \div b$ so, das der Flächeninhalt der Ellipse maximal wird.

2. Berechne das Flächenverhältnis von maximaler Ellipse zum Halbkreis.

3. Zeichne für $r = 1$ die Funktion des Ellipsenflächeninhalts in Abhängigkeit von a.

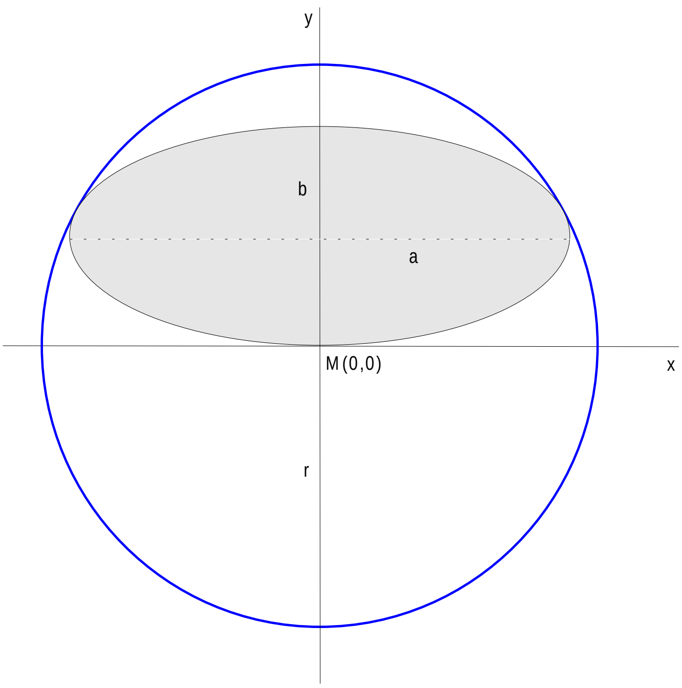

Abbildung 1: Bild zur Aufgabenstellung

Punktezahl=8

Lösung

Die Kreisgleichung mit Mittelpunkt im Ursprung lautet:

$$x^2 + y^2 = r^2 \tag{1}$$

Die Ellipsengleichung mit dem Mittelpunkt in $M_e(0, b)$ ist gegeben durch :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{(y-b)^2}{b^2} = 1 \tag{2}$$

Nun bestimmen wir mit Hilfe von *Mathematica* die Schnittpunkte zwischen Kreis und Ellipse.

$$\begin{aligned}
&\{\{x \to -\sqrt{\tfrac{a^2\left(a^2(-2b^2+r^2)-b^2\left(r^2+2\sqrt{a^4-a^2r^2+b^2r^2}\right)\right)}{(a^2-b^2)^2}},\\
&y \to \tfrac{b\left(a^2+\sqrt{a^4-a^2r^2+b^2r^2}\right)}{a^2-b^2}\},\\
&\{x \to \sqrt{\tfrac{a^2\left(a^2(-2b^2+r^2)-b^2\left(r^2+2\sqrt{a^4-a^2r^2+b^2r^2}\right)\right)}{(a^2-b^2)^2}},\\
&y \to \tfrac{b\left(a^2+\sqrt{a^4-a^2r^2+b^2r^2}\right)}{a^2-b^2}\},\\
&\{x \to -\sqrt{\tfrac{a^2\left(a^2(-2b^2+r^2)+b^2\left(-r^2+2\sqrt{a^4-a^2r^2+b^2r^2}\right)\right)}{(a^2-b^2)^2}},\\
&y \to \tfrac{b\left(-a^2+\sqrt{a^4-a^2r^2+b^2r^2}\right)}{-a^2+b^2}\},\\
&\{x \to \sqrt{\tfrac{a^2\left(a^2(-2b^2+r^2)+b^2\left(-r^2+2\sqrt{a^4-a^2r^2+b^2r^2}\right)\right)}{(a^2-b^2)^2}},\\
&y \to \tfrac{b\left(-a^2+\sqrt{a^4-a^2r^2+b^2r^2}\right)}{-a^2+b^2}\}\}
\end{aligned}$$

Die Ellipse soll den Kreis nur tangieren, also suchen wir von den quadratischen Lösungstermen die reele Doppelösung, d.h. der Ausdruck unter der Wuzel - die Diskriminante - muß identisch zu Null werden.

$$a^4 - a^2r^2 + b^2r^2 = 0, \quad \to \quad b_1 = -a\sqrt{1-\frac{a^2}{r^2}}, \qquad b_2 = a\sqrt{1-\frac{a^2}{r^2}} \tag{3}$$

Für die weitere Lösung kommt nur die positive Lösung b_2 in Betracht. Der Flächeninhalt der Ellipse beträgt:

$$A_{ell} = \pi\, a\, b = \pi\, a^2 \sqrt{1-\frac{a^2}{r^2}} \tag{4}$$

Um das Maximum zu bestimmen, benötigen wir die Nullstellen der ersten Ableitung:

$$A'_{ell} = \frac{\pi\,(-3a^3 + 2ar^2)}{r^2\sqrt{1-\frac{a^2}{r^2}}} = 0 \quad \to \quad a_{01} = -\sqrt{\frac{2}{3}}\,r, \qquad a_{02} = \sqrt{\frac{2}{3}}\,r \tag{5}$$

Für die Aufgabenstellung ist nur die positve Lösung von Interesse. Wir bilden die zweite Ableitung und berechnen den Funktiosnwert an der Stelle $a = a_{02}$.:

$$A''_{ell} = \frac{\pi(6a^4 - 9a^2r^2 + 2r^4)}{\sqrt{1 - \frac{a^2}{r^2}}(-a^2r^2 + r^4)} \quad \rightarrow \quad A''_{ell}(a_{02}) = -4\sqrt{3}\,\pi \tag{6}$$

Das Ergebnis ist kleiner Null, womit die Funktion A_{ell} an der Stelle $a = a_{02}$ ein lokales Maximum besitzt.

Für $a = a_{02}$ beträgt b_2 :

$$a_{02} = \sqrt{\frac{2}{3}}\,r \quad \rightarrow \quad b_2 = a\sqrt{1 - \frac{a^2}{r^2}} = \frac{r}{3}\sqrt{2}, \qquad p = \frac{a_{02}}{b_2} = \sqrt{3} \tag{7}$$

Die Ellipse besitzt ein maximalen Flächeninhalt, wenn das Verhältnis der Halbachsen $a \div b = \sqrt{3}$ beträgt. Das Flächenverhältnis zwischen Ellipse und Halbkreis beträgt dann:

$$v = \frac{2\,\pi\,a_{02}\,b_2}{\pi\,r^2} = \frac{4}{3\sqrt{3}} \tag{8}$$

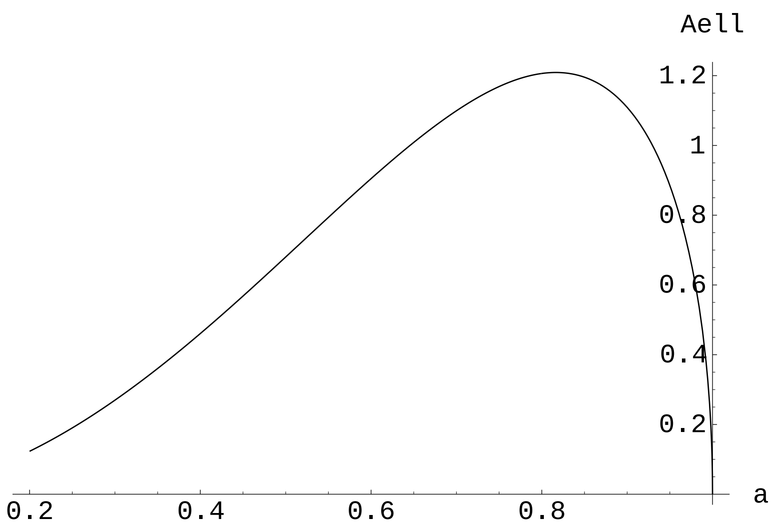

Abbildung 2: Flächeninhalt in Abhängigkeit von a