Flussfahrt

14. Mathematikwettstreit

TU Ilmenau, 1988

Aufgabenstellung

Ein Amphibienfahrzeug soll vom Punkt A des Flußufers R zum Punkt B der Flußufers L fahren. B liege senkrecht gegenüber A. Das Fahrzeug fährt so, daß sein Bug stets auf den Punkt B gerichtet ist, d.h. die Richtung der Eigengeschwindigkeit des Bootes ist gegeben.
Der Betrag der Eigengeschwindigkeit sei $v = const.$. Der Betrag der Strömungsgeschwindigkeit des Wassern sei $c = const.$. Die Richtung der Strömungsgeschwindigkeit das Wassers sei an jeder Stelle des Flusses dieselbe (vgl. Abbildung 1). Die Breite des Flusses sei a. Das Fahrzeug wird als Punkt betrachtet und die Verwendung des angegebenen $x-y$ Koordinatensystems sei empfohlen.

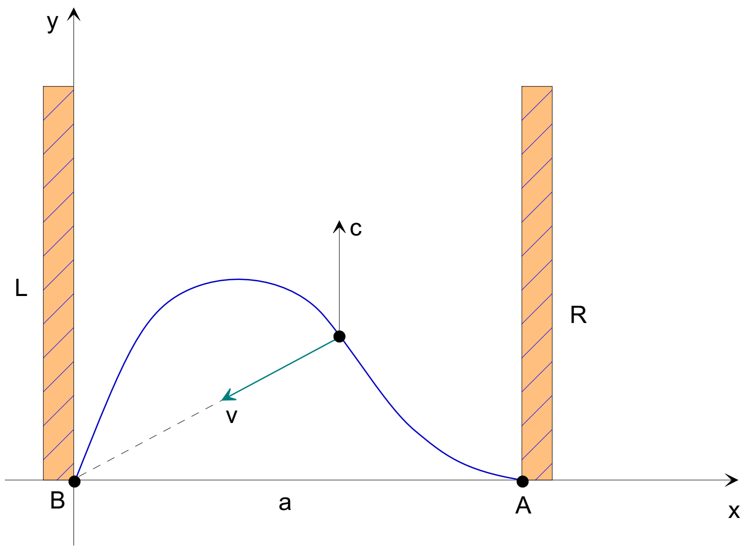

Abbildung 1: Skize zur Aufgabenstellung

1. Welchem System von Differentialgleichungen genügen die Koordinaten $x(t)$, $y(t)$ des jeweiligen Ortes des Bootes ?

2. Man bilde eine zeitfreie Differentialgleichung für die Bahnkurve des Fahrzeuges!

3. Die Bahnkurve ist durch Integration der DGl in der Form y = f(x) anzugeben!
4. In welchem Größenverhältnis müssen v und c stehen, damit daß Fahrzeug Punkt B erreicht?
5. Kann es mit A als Ausgangspunkt auch andere Punkte des Ufer's L erreichen?
6. In welchem Abstand x_{max} vom Ufer L erreicht das Boot die maximale Entfernung zur Grundlinien AB ?

Anleitung

Der Ort des Bootes werde durch den Orstvektor des Punktes beschrieben, an dem das Amphibienfahrzeug sich zur Zeit t befindet

$$\vec{r}(t) = [x(t), y(t)] \tag{1}$$

Die Geschwindigkeit des Fahrzeuges,

$$\dot{\vec{r}}(t) = [\dot{x}(t), \dot{y}(t)] \tag{2}$$

setzt sich vektoriell aus seiner Eigengeschwindigkeit und der Strömumgsgeschwindigkeit des Flusses zusammen. Die unter 2.) gesuchte DGL ist vom Typ

$$y' = F\left(\frac{y}{x}\right) \tag{3}$$

wobei $y(x)$ als Bahnkurve gesucht ist. Punktezahl=10

Aufstellung des Systems von Differentialgleichungen für $x(t), y(t)$

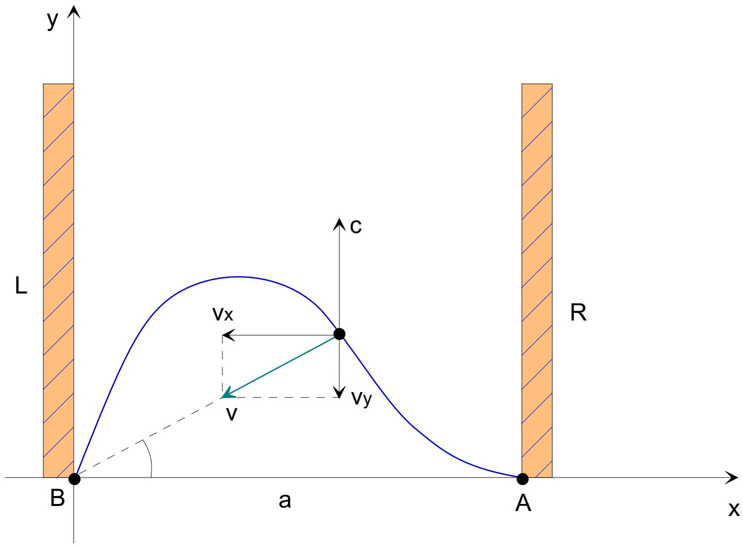

Abbildung 2: Skize zur Aufgabenstellung

Die Bewegungsgleichung entsteht aus der Überlagerung der Bewegung des Bootes ($v = konst.$) und der Strömungsgeschwindigkeit des Wassers $c = konst.$ Der Richtungsvektor der Eigengeschwindigkeit $\vec{v}$ ist stets zum Koordinatenursprung - dem Punkt B - gerichtet. Der Geschwindikeitsvektor $\vec{v}$ kann in einen Anteil v_x und in eine Anteil v_y zerlegt werden. Durch Addition der Strömungsgeschwindigkeit c zur $y-$ Komponente erhalten wir die vollständige Bewegungsgleichung:

$$\dot{x}(t) = -v \cdot \cos(\alpha) = -v \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \tag{4}$$

$$\dot{y}(t) = -v \cdot \sin(\alpha) + c = -v \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + c \tag{5}$$

Bildung der zeitfreien Differentialgleichung $y' = f(x, y)$

Aus den Bewegungsgleichungen $\dot{x}$ und $\dot{y}$ wird mittels Division der Differentialquotient $y' = \frac{dy}{dx}$ gebildet:

$$y'(x,y) = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{y}{x} - \frac{c \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}}{v}, \qquad AB: \quad y'(x=a) = 0 \tag{6}$$

Integration der Differentialgleichung

Die Gleichung (6) ist vom Typ:

$$y' = \frac{y}{x} + c \cdot F\left(\frac{y}{x}\right) \tag{7}$$

Die Substitution

$$y = x \cdot z \quad \rightarrow \quad y' = z + x \cdot z' \tag{8}$$

liefert:

$$z + x \cdot z' = z - \frac{c}{v} \cdot \sqrt{1+z^2} \tag{9}$$

$$\frac{z'}{\sqrt{1+z^2}} = -\frac{c}{v} \cdot \frac{1}{x} \tag{10}$$

Jetzt können beide Seiten der Differentialgleichung integriert werden :

$$\int \frac{z'}{\sqrt{1+z^2}} \cdot dz = -\frac{c}{v} \cdot \int \frac{1}{x} \cdot dx \tag{11}$$

$$arsinh(z) = arsinh\left(\frac{y}{x}\right) = -\frac{c}{v} \cdot \ln\left(\frac{x}{C}\right) \tag{12}$$

$$y(x) = x \cdot \sinh\left(-\frac{c}{v} \cdot \ln(x)\right) \tag{13}$$

Die Integrationskonstante C wird aus der Anfangsbedingung bestimmt :

$$AB:\ y(a) = 0 \quad \rightarrow \quad 0 = a \cdot \sinh\left(-\frac{c}{v} \cdot \ln\left(\frac{a}{C}\right)\right) \tag{14}$$

Diese Gleichung wird nur dann Null, wenn der Term im *Sinushyperbolicus* ebenfalls zu Null wird, also :

$$0 = -\frac{c}{v} \cdot \ln\left(\frac{a}{C}\right) \quad \rightarrow \quad 0 = \ln\left(\frac{a}{C}\right) \quad \rightarrow \quad C = a \tag{15}$$

Die Bahnkurve des Amphibienfahrzeuges wird durch Gleichung (16) beschrieben.

$$y(x) = x \cdot \sinh\left(\frac{c}{v} \cdot \ln\left(\frac{a}{x}\right)\right), \quad 0 \le x \le a \tag{16}$$

Auswertung der Bahnkurve für verschiedene Parameter

Die Gleichung

$$y(x) = x \cdot \sinh\left(\frac{c}{v} \cdot \ln\left(\frac{a}{x}\right)\right), \quad 0 \leq x \leq a \tag{17}$$

soll nun für verschiedene Verhältnisse $c \div v$ diskutiert werden.

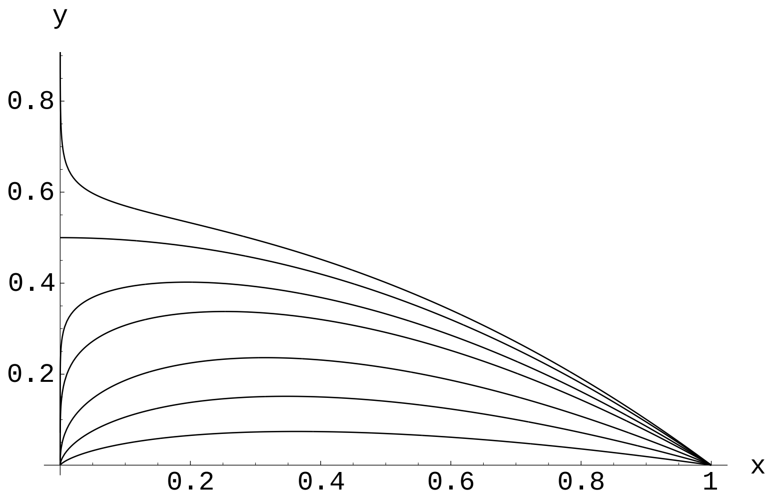

Abbildung 3: Lösung für $a = 1.0, \quad c = 0.5, \quad 0.1 \leq v \leq 0.6$

Fall 1: $c > v$

Im Fall $c > v$ erhalten wir :

$$\lim_{x \to 0^+} \left[x \cdot \sinh\left(\frac{c}{v} \cdot \ln\left(\frac{a}{x}\right)\right)\right] = \infty \tag{18}$$

das Boot ereicht nie das Ufer L (siehe auch Abbildung 3).

Fall 2: $c = v$

Für den Fall, das die Eigengeschwindigkeit vom Boot v gleich der Strömungsgeschwindigkeit c ist, ergibt sich der Grenzwert:

$$\lim_{x \to 0^+} \left[x \cdot \sinh\left(\frac{c}{v} \cdot \ln\left(\frac{a}{x}\right)\right)\right] = \frac{a}{2} \tag{19}$$

Das Boot ereicht also das Ufer stets im Punkt $\left(0, \frac{a}{2}\right)$ (siehe auch Abbildung 3).

Fall 3: $c < v$

Der Grenzwert beträgt immer Null, und das Boot landet im Punkt B.

$$\lim_{x \to 0^+} \left[x \cdot \sinh\left(\frac{c}{v} \cdot \ln\left(\frac{a}{x}\right)\right)\right] = 0 \tag{20}$$

Berechnung des Extrempunktes

Für den Fall $c < v$ gibt es auf dem Intervall $0 \leq x \leq a$ ein Maximum der Funktion $y = f(x)$. Die erste Ableitung der Bewegungskurve nach x lautet :

$$y'(x) = -\frac{c \cosh\left(\frac{c}{v} \cdot \ln\left(\frac{a}{x}\right)\right)}{v} + \sinh\left(\frac{c}{v} \cdot \ln\left(\frac{a}{x}\right)\right) \tag{21}$$

Diese Funktion besitz zwei reelle Nullstellen und zwei komplexe Nullstellen. Für uns muß $x \in R$ und $x > 0$ sein.

$$y'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad x_{max} = a \cdot \exp^{\left[-\frac{v\, arccosh\left(\frac{v}{\sqrt{v^2-c^2}}\right)}{c}\right]} \tag{22}$$

Die Lage des Maximums ist vom Verhältnis $v \div c$ abhängig. Wir führen den Paramter $u = \frac{v}{c}$ ein und erhalten :

$$x_{max}(u,a) = a \cdot \exp^{\left[-u\, arccosh\left(\frac{u}{\sqrt{u^2-1}}\right)\right]} \tag{23}$$

Für die Variation von u im Intervall $1 \leq u \leq 10$ erhält man Abbildung 4. Bei

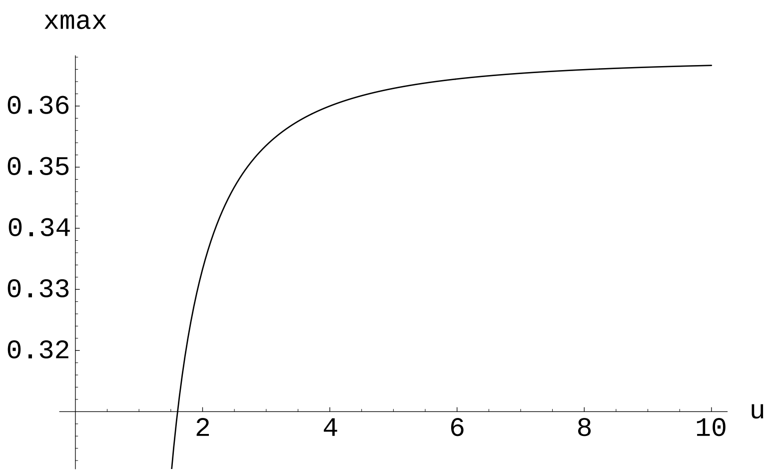

Abbildung 4: Verschiebung der Lage des Maximums für $1 \leq u \leq 10$

einem Verhältnis $u = 2$ beträgt $x_{max} = \frac{a}{3}$, wie in Abbildung 2 dargestellt. Für den speziellen Fall $u = 1$, d.h. $v = c$ beträgt $x_{max} = 0$ und liegt damit auf der $y-$ Achse.