

## Pflanzenwachstum

Eine Aufgabe aus *mathsoftpuzzle*

24. August 2001

Die Fläche des jungen Blattes der Pflanze *Victoria-Regi*, das kreisförmig ist, hat eine Wachstumsgeschwindigkeit, die dem Umfang des Blattes und der Menge des einfallenden Sonnenlichtes proportional ist.

Die Menge des einfallenden Lichtes ist der Blattfläche und dem Cosinus es Winkels zwischen der Richtung des Sonnenstrahlen und der Vertikalen proportional.

Gesucht ist die Abhängigkeit der Blattfläche von der Zeit als  $A = f(t)$ . Es ist bekannt, das die Blattfläche um 6 Uhr  $1600 \text{ cm}^2$  betrug, und um 18 Uhr auf  $2500 \text{ cm}^2$  angewachsen ist.

Ferner nehme man an, daß das Gewächs am Äquator steht und Tag- und Nachtgleiche gilt. Der Winkel zwischen der Richtung der Sonnenstrahlen und der Vertikalen beträgt um 6 Uhr und 18 Uhr 90 Grad und zur Mittagswende 0 Grad.

Punktezahl=8

---

## Lösung

Die Differentialgleichung zur Bestimmung der Blattfläche folgt unmittelbar aus der Aufgabenstellung.

$$\frac{dA}{dt} = k \cdot u \cdot A \cdot \cos \alpha$$

Der Blattumfang kann durch die Fläche ersetzt werden:

$$A = \pi r^2 \quad r = \sqrt{\frac{A}{\pi}} \quad u = 2 \cdot \pi \cdot r = 2 \cdot \sqrt{\pi} \cdot \sqrt{A}$$

Der Winkel  $\alpha$  ist ein Funktion der Zeit. Aus den Winkelangaben für 6 Uhr, 12 Uhr und 18 Uhr ergibt sich folgende Gleichung:

$$\alpha(6) = -\frac{\pi}{2}, \quad \alpha(12) = 0, \quad \alpha(18) = \frac{\pi}{2}, \quad \alpha(t) = \frac{t\pi}{12} - \pi$$

Die Differentialgleichung mit Anfangsbedingung lautet :

$$\frac{dA}{dt} = k \cdot \sqrt{A} \cdot A \cdot \cos\left(\frac{t\pi}{12} - \pi\right) \quad AB: \quad A(6) = 1600$$

Ihre Lösung ergibt in *Mathematica*:

$$A(t) = \frac{1600 \pi^2}{(86400k^2 - 480k\pi + \pi^2 - 28800k^2 \cos\left[\frac{\pi t}{6}\right] - 115200k^2 \sin\left[\frac{\pi t}{12}\right] + 480k\pi \sin\left[\frac{\pi t}{12}\right])}$$

Der Proportionalitätsfaktor  $k$  folgt aus der Randbedingung  $A(18) = 2500$  :

$$A(18) = \frac{1600 \pi}{230400 k^2 - 960 k \pi + \pi^2} = 2500 \quad \rightarrow \quad k_1 = \frac{\pi}{2400}, \quad k_2 = \frac{3\pi}{800}$$

Für  $k = k_1$  ergibt sich die folgende Funktionsgraphik über der Zeit.

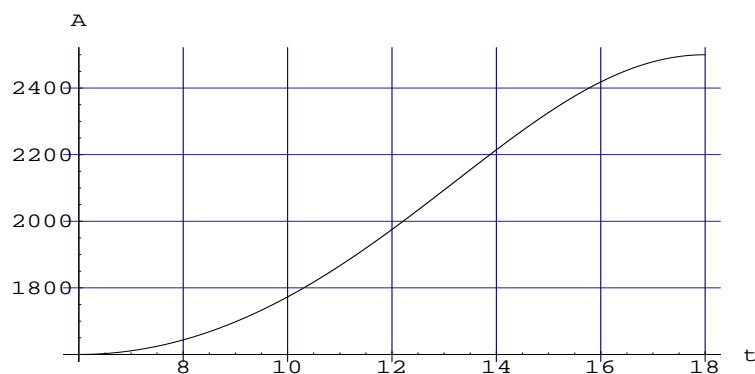


Abbildung 1: Blattfläche der *Victoria Regi* von 6 Uhr bis 18 Uhr