Käferspaziergang

Ingmar Rubin, Berlin

3. April 2002

Die Differentialgleichung (1) beschreibt eine geschlossene Kurve c in der $x-y$ Ebene.

$$(x^2+y^2)^2 \cdot (1+{y'}^2) = (x \cdot y' - y)^2 \tag{1}$$

Weiterhin ist bekannt, das die Kurve durch den Koordinatenursprung $O(0,0)$ läuft.

Ein Käfer K kriecht mit der Geschwindigkeit $v = (1+r)\,\frac{cm}{s}$ auf der Kurve, wobei r die Distanz zwischen Kurvenpunkt und Ursprung entspricht, also $r = \overline{OK}$. Zum Zeitpunkt $t=0$ befindet sich der Käfer im Koordinatenursprung $O(0,0)$.

Berechnen Sie die Zeit T, bis der Käfer wieder den Ursprung erreicht hat !

Punktezahl=10

Bestimmung der Bahnkurve

Aus der Aufgabenstellung ist bekannt, das die Lösungskurve geschlossen ist. Solche Kurven berehnet man besser in Polarkoordinaten, d.h. $r = r(\alpha)$. Wir transformieren die Differentialgleichung (1) in Polarkoordinaten mittels :

$$x = r\,\cos\alpha, \quad y = r\,\sin\alpha \tag{2}$$

und

$$y' = \frac{r'\,\sin\alpha + r\,\cos\alpha}{r'\,\cos\alpha - r\,\sin\alpha}, \qquad 1 + y'^2 = \frac{r^2 + r'^2}{(r'\,\cos\alpha - r\,\sin\alpha)^2} \tag{3}$$

Nach ersetzen der Variablen x, y, y' in der Ausgangsgleichung (4) erhält man die äquivalente Differentialgleichung (5) in Polarkorrdinaten. Deren Lösung ist mit Hilfe des *trigonomerischen Pythagoras* schnell gefunden.

$$(x^2 + y^2)^2 \cdot (1 + y'^2) = (x \cdot y' - y)^2 \tag{4}$$

$$r^2 + r'^2 = 1 \quad \to \quad \sin(\alpha)^2 + \cos(\alpha)^2 = 1 \quad \to \quad r(\alpha) = \sin\alpha \tag{5}$$

Die Lösungskurve c entspricht einem Kreis mit Durchmesser 1 der durch den Ursprung verläuft, für das Intervall $0 \leq \alpha \leq \pi$.

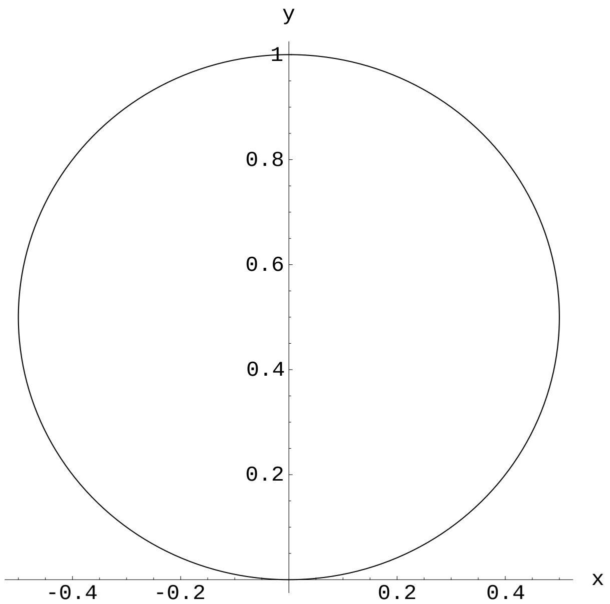

Abbildung 1: Lösungskurve $r = \sin\alpha$ im Intervall $0 \leq \alpha \leq \pi$

Berechnung der Zeit T für eine Umrundung

Die Geschwindigkeit ist als Differentialquotient des Weges nach der Zeit definiert:

$$v = \frac{ds}{dt} = 1 + r(\alpha) \tag{6}$$

Das Wegelement ds berechnet sich für Kurven in Polarkordinaten nach :

$$ds = \sqrt{r'^2 + r^2}\, d\alpha \tag{7}$$

Die Zeit T für eine Kurvenumrundung beträgt :

$$T = \int\limits_0^T dt = \int\limits_{\alpha=0}^{\alpha=\pi} \frac{\sqrt{r'^2 + r^2}}{1+r}\, d\alpha = \int\limits_{\alpha=0}^{\alpha=\pi} \frac{1}{1+\sin\alpha}\, d\alpha \tag{8}$$

Zu beachten ist, das nicht über die volle Periode 2π integriert wird, da der Käfer bereits nach 180° wieder den Ursprung erreicht hat ! Die unbestimmte Integration über α liefert:

$$\int \frac{1}{1+\sin\alpha}\, d\alpha = \frac{2\,\sin\left[\frac{\alpha}{2}\right]\left(\cos\left[\frac{\alpha}{2}\right] + \sin\left[\frac{\alpha}{2}\right]\right)}{1+\sin[\alpha]} + C \tag{9}$$

Nach Einsetzen der Grenzen erhält man:

$$T = \left[\frac{2\,\sin\left[\frac{\alpha}{2}\right]\left(\cos\left[\frac{\alpha}{2}\right] + \sin\left[\frac{\alpha}{2}\right]\right)}{1+\sin[\alpha]}\right]_0^\pi = 2 \tag{10}$$

Der Käfer benötigt genau 2 Sekunden für die Umrundung der Kurve c.

Literaturhinweis

/1/ Baule, Bernhard : **Die Mathematik des Naturforscher und Ingenieurs** - Band IV *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, S.Hirzel Verlag Leipzig 1963