Hafeneinfahrt

Prof.Dr.Steinhaus

Wroclaw, 1951

Der Kapitän eines Schiffes beobachtet in der Nacht zwei fest leuchtende Seezeichen A und B. Er weiß, daß er in jedem Fall die richtige Einfahrt in den angesteuerten Hafen findet, wenn er das Schiff S stets auf einem solchen Kurs steuert, der den Winkel $\sphericalangle ASB$ halbiert.

1. Auf welchem Weg erreicht das Schiff den Hafen ? Bestimme die zugehörige Differentialgleichung.
2. Löse die Gleichung numerisch für $\overline{AB} = 10$ und $S(12, 15)$. Zeichne die Kurve in ein $x - y$ Koordinatensystem ein.

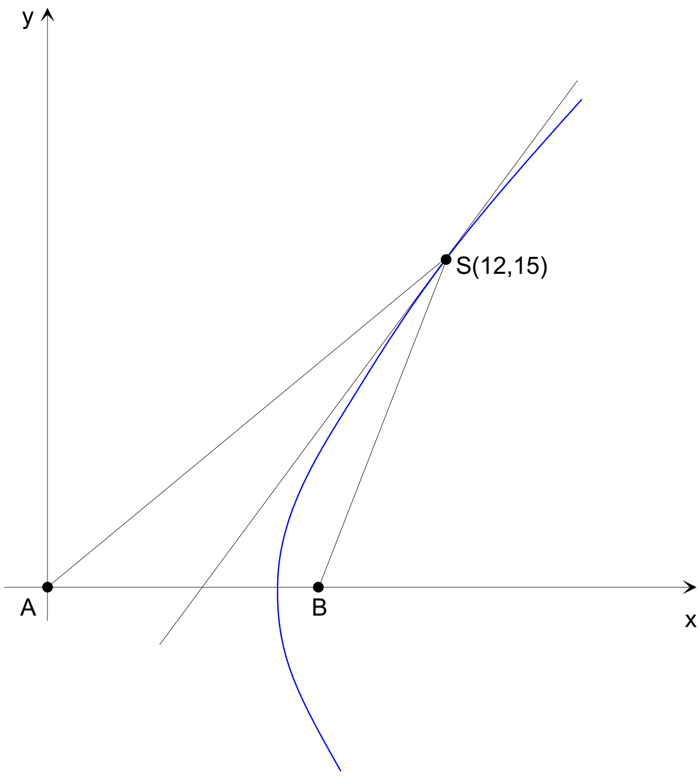

Abbildung 1: Skizze zur Aufgabe

Punktezahl=8

Bestimmung der Bahnkurve

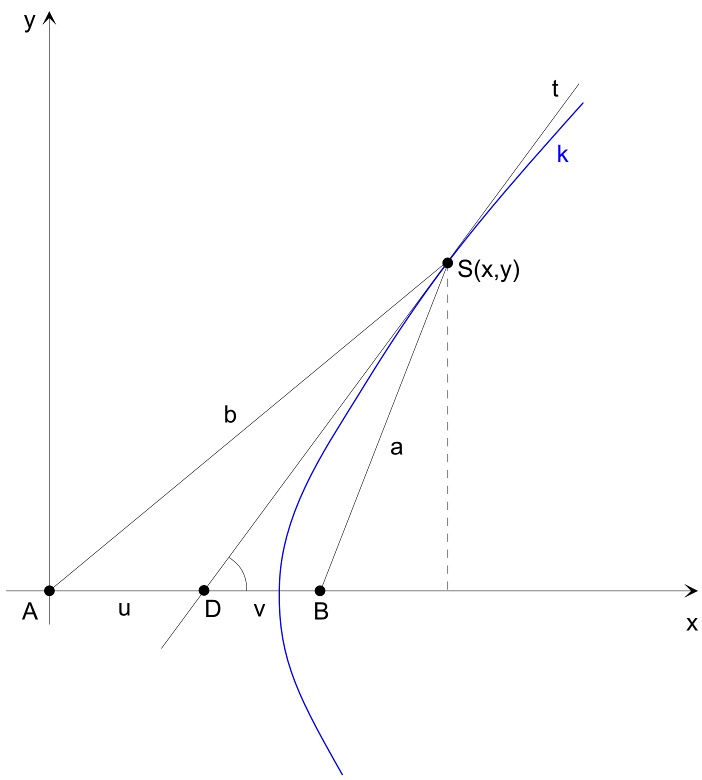

Abbildung 2: Skizze zur Lösung

Wir ergänzen die Aufgabenskizze um die Strecken- und Winkelbezeichner entsprechend Abbildung 2. Das Seezeichen A befindet sich demnach im Koordinatenursprung eines rechtwinklig, kartesischen Koordinatensystems. Die Tangente t im Kurvenpunkt S schneidet die Strecke $\overline{AB}$ im Punkt D. Die Teilabschnitte seien mit $u = \overline{AD}$ und $v = \overline{DB}$ bezeichnet.
Nach dem *Satz des Apollonius* teilt die Winkelhalbierende t die gegenüberliegende Dreieckseite im Verhältnis der anliegenden Seiten :

$$\frac{b}{u} = \frac{a}{v}, \quad c = u + v \quad \rightarrow \quad u = \frac{b\,c}{a+b}, \quad v = \frac{a\,c}{a+b} \tag{1}$$

Das Schiff habe die allgemeinen Koordinaten $S(x, y)$. Die Strecken $a = \overline{AS}$ und $b = \overline{BS}$ berechen sich dann aus der Punktabstandsformel:

$$a = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}, \qquad b = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{2}$$

Für den Anstiegswinkel α der Kurventangente t erhalten wir :

$$\tan\alpha = y' = \frac{y}{x-u} = \frac{y}{x - \frac{b\,c}{a+b}} = \frac{y\,(a+b)}{x\,(a+b) - b\,c} \tag{3}$$

Schließlich ersetzen wir a, b durch die Wurzelterme aus (2) und erhalten die gesuchte Differentialgleichung für die Kurve k.

$$y' = \frac{y\,(\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{x^2+y^2})}{x\left(\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{x^2+y^2}\right)-c\,\sqrt{x^2+y^2}} \tag{4}$$

Bei (4) handelt es sich um eine nichtlineare Differentialgleichung. Die Suche nach einer allgemeinen Lösung gestaltet sich sehr schwierig.

Numerische Lösung

Die Entfernung zwischen den Seezeichen beträgt $c = \overline{AB} = 10$. Als Anfangswert setzen wir die Koordinaten vom Punkt S :

$$y' = \frac{y\,(\sqrt{(x-10)^2+y^2}+\sqrt{x^2+y^2})}{x\left(\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{x^2+y^2}\right)-10\,\sqrt{x^2+y^2}} \qquad AB:\; y(12) = 15$$

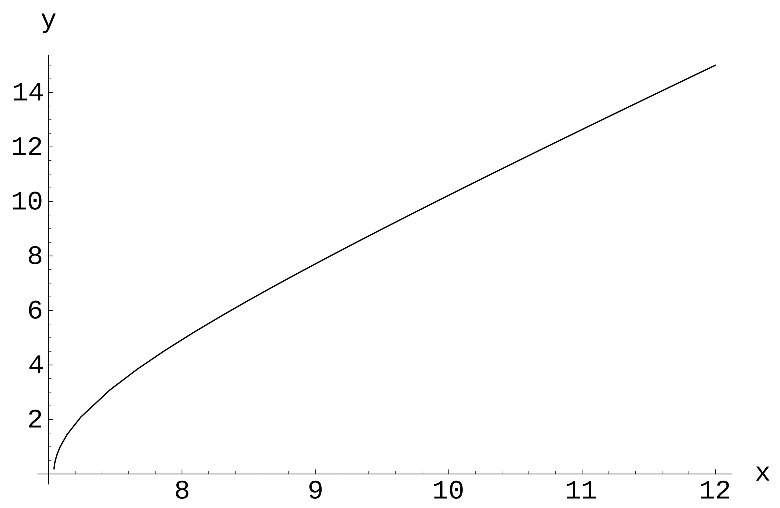

Abbildung 3: numerische Lösung für die Bahnkurve des Schiffes

Eigenschaften der Hyperbel

Die Kurve auf der sich das Schiff bewegt, ist Teil einer Hyperbel mit den Brennpunkten in A, B. Die Tangente t an einem Kurvenpunkt der Hyperbel hat genau die Eigenschaft, den Winkel zwischen den Radiusvektoren $\vec{AS}$ und $\vec{BS}$ zu halbieren.