c_w- Wert Bestimmung

aus dem Übungsblatt *Gewöhnliche Differentialgleichungen*

der TU-Berlin

Die Bewegungsgleichung eines gleichförmig beschleunigten Kraftfahrzeugs lautet unter Berücksichtigung des Luftwiderstandes bei Vernachlässigung aller übrigen Kräfte

$$m \cdot \dot{v} = m \cdot a - \frac{1}{2} \cdot c_W \cdot \rho \cdot A \cdot v^2$$

Dabei bedeuten / seien

m	$=$	800	kg	Fahrzeugmasse
v			m/s	Geschwindigkeit
a	$=$	1	m/s^2	
c_W	$=$	?		Luftwiderstandsbeiwert (dimensionslos)
ρ	$=$	1.25	kg/m^3	Luftdichte
A	$=$	2	m^2	angeströmte Fläche

Sei die erziehlbare Höchstgeschwindigkeit $v_\infty = \lim_{t \to \infty} v(t) = 144\,\text{km/h}$.
Berechne c_W.

Punktezahl=8

Lösung zur Aufgabe

Die zu lösende DGL mit Anfangsbedingung lautet:

$$\frac{dv}{dt} = a - \frac{1}{2m} \cdot c_W \cdot \rho \cdot A \cdot v^2, \qquad AB: \quad v(0) = 0 \tag{1}$$

Mit Hilfe von *Mathematica* erhält man als Lösung:

$$v(t) = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{a} \cdot \sqrt{m} \cdot \tanh\left[\frac{\sqrt{a}\sqrt{A}\sqrt{c_w}\sqrt{\rho} \cdot t}{\sqrt{2}\sqrt{m}}\right]}{\sqrt{A} \cdot \sqrt{c_w} \cdot \sqrt{\rho}} \tag{2}$$

Um den Grenzwert $t \to \infty$ zu ermitteln, betrachten wir zunächst nur die Tanges Hyperbolicus Funktion.

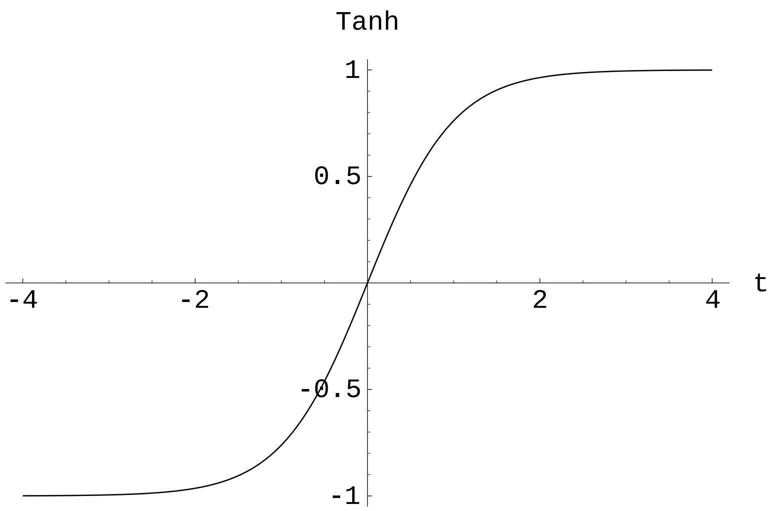

Abbildung 1: Tangens Hyperbolicus im Intervall $-4 \leq t \leq 4$

Der Grenzwert von $\tanh(t)$ für $t \to \infty$ beträgt 1. Als Grenzgeschwindigkeit ergibt sich :

$$v(t \to \infty) = v_g = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{a} \cdot \sqrt{m}}{\sqrt{A} \cdot \sqrt{c_w} \cdot \sqrt{\rho}} \tag{3}$$

Diese Gleichung kann nach c_w aufgelöst werden:

$$c_w = \frac{2 \cdot a \cdot m}{A \cdot v_g^2 \cdot \rho} = 0.4 \tag{4}$$

Der Verlauf der Beschleunigungskurve vom Fahrzeug sieht wie folgt aus:

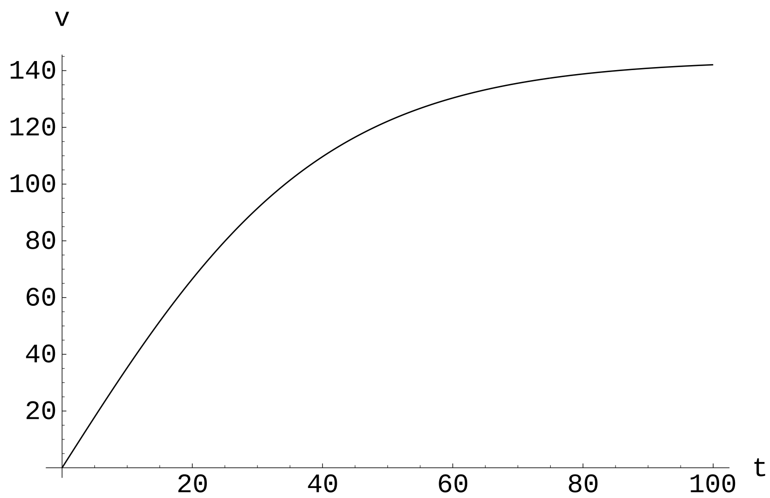

Abbildung 2: Fahrzeuggeschwindigkeit während der ersten 100 Sekunden