

---

# Gipfelstürmer

Eine Aufgabe von Ingmar Rubin, Berlin

11. April 2002

Frank und Thomas sind begeisterte Bergwanderer. Auf ihrer letzten Tour durch die Lienz Dolomiten waren sie gezwungen einen längeren Aufenthalt in der *Karlsbader Hütte*, 2261 m ü. NN, zu suchen, da das Wetter plötzlich umgeschlagen war.

Doch *lange Weile* ist den Beiden ein Fremdwort. Frank und Thomas beschäftigen sich neben der Kletterei leidenschaftlich gerne mit dem Lösen mathematischer Probleme. Einen Zettelblock und Bleistift haben sie stets dabei. Frank möchte heute ein mathematisches Problem, das im Zusammenhang mit dem Aufstieg an Berghängen steht, lösen. Er schildert Thomas die Aufgabenstellung wie folgt:

Angenommen ein Berg habe idealisiert die Form eines geraden Kreiskegels mit der Gipfelhöhe  $h$  und dem Grundradius  $R$ . Am Bergrand windet sich ein Wanderweg stetig nach oben, wobei der Anstieg  $k$  stets konstant bleibt. Ein Wanderer beginnt den Aufstieg mit einer Geschwindigkeit  $v_0$ . Mit steigender Höhe  $z$  schwinden seine Kräfte, so dass die Geschwindigkeit linear abfällt. Kurz vor Erreichen des Gipfels beträgt seine Geschwindigkeit nur noch  $v = \frac{v_0}{m}$  des anfänglichen Wertes ( $1 \leq m \leq 100$ ).

Wie berechnet man die Wegstrecke  $s$  vom Fußpunkt bis zum Gipfel und welche Zeit  $T$  benötigt man für den Aufstieg ?

Nach einer guten Stunde Rechnerei präsentiert Thomas eine simple Formel für den Weg  $s$  und die Zeit  $T$ , wobei der Radius des Kegels offensichtlich keine Rolle spielt. Das kann Frank kaum glauben. Zeigen Sie dass Thomas mit seiner Rechnung die richtigen Formeln gefunden hat und lösen Sie die folgenden Teilaufgaben. (Punktezahl=12)

1. Auf welcher Kurve, in Parameterdarstellung, bewegt sich der Bergsteiger entlang des Berghanges, wenn der Anstieg  $k$  über den Weg stets konstant bleiben soll ?
  2. Plotten Sie die Kurve im Maßstab  $1 \div 100.000$  für die ersten 10 Windungen mit einem Programm Ihrer Wahl. Benutzen sie als numerische Werte  $R = 2 \text{ km}$ ,  $h = 4 \text{ km}$  und  $k = 0.1$ .
  3. Berechnen Sie die Wegstrecke  $s$  vom Fußpunkt bis zum Gipfel in Abhängigkeit von  $h$  und  $k$ .
  4. Ermitteln Sie eine Formel für die Aufstiegszeit  $T$ . Berücksichtigen Sie dabei den linearen Geschwindigkeitsabfall in Abhängigkeit von der Höhe.
  5. Plotten Sie die Kurve  $T(m)$  für  $h = 4 \text{ km}$ ,  $k = 0.1$ ,  $v_0 = 4 \text{ km h}^{-1}$  im Intervall  $1 \leq m \leq 100$ .
-