Jans Kalkuhlation

Eine Rätselaufgabe von Pierre Tougne

23. November 2004

Jan kennt seine Kühe. Er weiß, dass 25 seiner Kühe in vier Tagen eine Weide von $20\,Ar$ kahl fresssen, während für 27 Tiere eine Weide von $24\,Ar$ fünf Tage reicht.
Wenn er die Herde auf eine Weide treibt, hat das Gras stets die gleiche Höhe. Außerdem wächst das Gras auf seinen Weiden stetig und mit konstanter Geschwindigkeit nach.
Wie groß muss eine Weide sein, auf der 100 Kühe 16 Tage grasen können. Punktezahl=6

Lösungsvorschlag I

von Jutta Gut, Wien

Ich setze die Menge, die eine Kuh pro Tag frisst, gleich 1. g ist das vorhandene Gras pro Ar und n die Menge, die pro Tag auf einem Ar nachwächst. Dann erhalten wir zwei Gleichungen:

$$20\,g + 4 \cdot 20\,n = 4 \cdot 25, \qquad 24\,g + 5 \cdot 24\,n = 5 \cdot 27 \tag{1}$$

$$\Rightarrow \quad g = \frac{5}{2}, \qquad n = \frac{5}{8} \tag{2}$$

Die gesuchte Weide hat die Fläche x Ar:

$$x \cdot g + 16\,x \cdot n = 1600 \quad \Rightarrow \quad x = 128 \tag{3}$$

Lösungsvorschlag II

von Reinhold Möbs, Karlsruhe

Sei GE (Graseinheit) die Menge Gras, die eine Kuh in einem Tag frisst. Sei G der Grasbestand eines Ars, und x der tägliche Zuwachs pro Ar (immer gemessen in Graseinheiten). Dann fressen die 25 Kühe in 4 Tagen (100 Kuh-Tage $\doteq 100\,GE$) eine Gesamtmenge von

$$G \cdot 20 + 4 \cdot 20 \cdot x \tag{1}$$

Die 27 Kühe fressen in 5 Tagen (135 Kuh-Tage $\doteq 135\,GE$)

$$G \cdot 24 + 5 \cdot 24 \cdot x \tag{2}$$

Aus den Gleichungen

$$100 = G \cdot 20 + 4 \cdot 20 \cdot x, \qquad 135 = G \cdot 24 + 5 \cdot 24 \cdot x \tag{3}$$

folgt

$$G = \frac{5}{2}, \qquad x = \frac{5}{8} \tag{4}$$

Nun braucht man für 1600 Kuh-Tage ($\doteq 1600\,GE$) eine Fläche F, so dass

$$1600 = G \cdot F + 16 \cdot x \cdot F \tag{5}$$

Einsetzen von G und x und auflösen der Gleichung liefert $F = 128\,Ar$.

Lösungsvorschlag III

von Ingmar Rubin, Berlin

Es seien folgende Bezeichner eingeführt:

- k Anzahl der Kühe,
- t Zeit bis die Weide kahl gefressen ist
- A Weidefläche,
- h_0 Höhe des Grases zu dem Zeitpunkt als Jan die Tiere auf die Weide läßt,
- $h(t)$ Grashöhe in Abhängigkeit von der Zeit,
- v_g Wachstumsgeschwindigkeit vom Gras,
- v_k Geschwindigkeit mit der eine Kuh das Gras vertilgt.

Die Grashöhe ist eine lineare Funktion der Zeit - stetiges Wachstum mit konstanter Geschwindigkeit:

$$h(t) = h_0 + v_g \cdot t \tag{1}$$

Das Volumen an Gras, dass sich auf der Weide befindet berechnet sich aus dem Produkt Fläche $\times$ Grashöhe :

$$V_{zu} = A \cdot h = A \cdot (h_0 + v_g \cdot t) \tag{2}$$

Die Grasmenge, welche die Kühe pro Tag vertilgen hängt von der Anzahl der Tiere und ihre Fressgeschwindigkeit ab:

$$V_{ab} = k \cdot v_k \tag{3}$$

Eine kahl gefressen Weide setzt Äquivalenz zwischen V_{zu} und V_{ab} voraus. Aus der Aufgabenstellung folgen nun drei Gleichungen:

$$A_1 \cdot (h_0 + v_g\, t_1) = k_1 \cdot v_k \cdot t_1 \tag{4}$$

$$A_2 \cdot (h_0 + v_g\, t_2) = k_2 \cdot v_k \cdot t_2 \tag{5}$$

$$x \cdot (h_0 + v_g\, t_3) = k_3 \cdot v_k \cdot t_3 \tag{6}$$

wobei die letzte Gleichung die gesuchte Weidefläche x enthält. Wir lösen die Gleichungen (4) und (5) nach v_g und v_k auf:

$$v_g = \frac{A_2\, h_0\, k_1\, t_1 - A_1\, h_0\, k_2\, t_2}{-A_2\, k_1\, t_1\, t_2 + A_1\, k_2\, t_1\, t_2} \tag{7}$$

$$v_k = \frac{A_1\, A_2\, h_0\, t_1 - A_1\, A_2\, h_0\, t_2}{-A_2\, k_1\, t_1\, t_2 + A_1\, k_2\, t_1\, t_2} \tag{8}$$

Das Ergebnis setzen wir in (6) ein und fassen zusammen:

$$\frac{h_0\,(A_2\,k_1\,t_1\,(t_2 - t_3)\,x + A_1\,(A_2\,k_3\,(t_1 - t_2)\,t_3 + k_2\,t_2\,(-t_1 + t_3)\,x))}{(-A_2\,k_1 + A_1\,k_2)\,t_1\,t_2} = 0 \quad (9)$$

Beiden Seiten werden mit dem Nenner multipliziert. Da $h_0 > 0$ ist kann durch h_0 gekürtzt werden:

$$A_2\,k_1\,t_1\,(t_2 - t_3)\,x + A_1\,(A_2\,k_3\,(t_1 - t_2)\,t_3 + k_2\,t_2\,(-t_1 + t_3)\,x) = 0 \quad (10)$$

Die Auflösung nach x ergibt schließlich:

$$x = \frac{A_1\,A_2\,k_3\,(t_1 - t_2)\,t_3}{A_1\,k_2\,t_2\,(t_1 - t_3) + A_2\,k_1\,t_1\,(-t_2 + t_3)} \quad (11)$$

Nach dem Einsetzen der numerischen Werte aus der Aufagabenstellung erhält man

$$x = 128\,Ar \quad (12)$$

Die Weide, auf der 100 Kühe 16 Tage grasen können, muß 128 Ar groß sein.