Am Zug

Eine Aufgabe aus *Spektrum der Wissenschaft*

Alfred und Berta gehen in gleicher Richtung die Schienen entlang. Ein vorbeifahrender Zug überholt Alfred innerhalb von zehn Sekunden.

Zwanzig Minuten, nachdem der Zug Alfred überholt hat, erreicht er Berta und überholt sie innerhalb von neun Sekunden.

Wie lange braucht Alfred, um Berta einzuholen, wenn man alle Geschwindigkeiten als konstant voraussetzt ?

Punktezahl: 5

Lösung

Folgende Größen werden vereinbart:

- v_1 Geschwindigkeit von Alfred ,
- v_2 Geschwindigkeit von Berta ,
- v_z Geschwindigkeit des Zuges ,
- z Zuglänge ,
- $t_1 = 9\,s$,
- $t_2 = 10\,s$,
- $t_3 = 20\,min = 1200\,s$,

Wir nehmen an, daß sich Alfred zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ am Ort $s = 0$ befand. Weiterhin befindet sich die Zugspitze zu dieser Zeit ebenfalls im Koordinatenursprung. Der Anfangsort von Berta betrage $s_2(t_0) = s_x$.

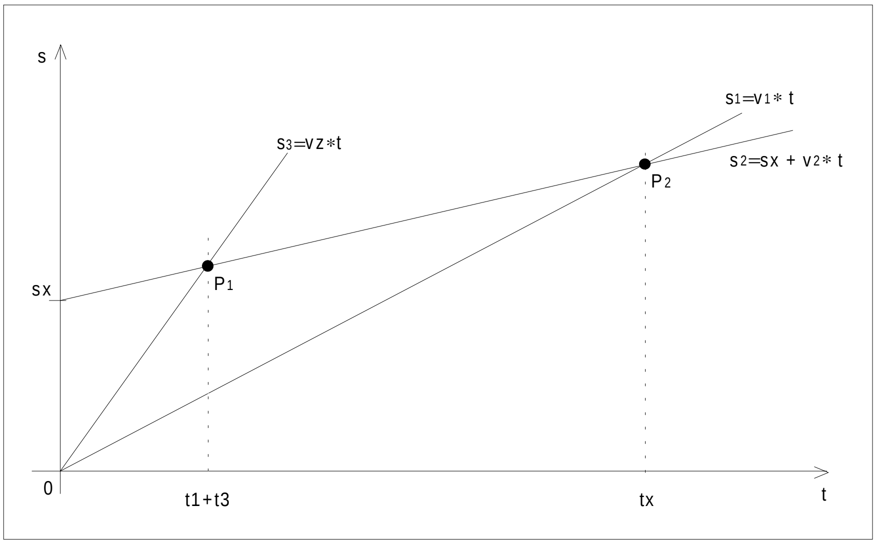

Abbildung 1: Bewegungsgleichungen von Alfred, Berta und dem Zug

Damit lassen sich die drei Bewegungsgleichungen formulieren:

$$Alfred: \qquad s_1(t) = v_1 \cdot t \tag{1}$$

$$Berta: \qquad s_2(t) = s_x + v_2 \cdot t \tag{2}$$

$$Zug: \qquad s_3(t) = v_z \cdot t \tag{3}$$

Aus den Überholvorgang am Zug folgen die Gleichungen:

$$z = (v_z - v_1) \cdot t_1, \quad z = (v_z - v_2) \cdot t_2 \quad \rightarrow \quad v_z = 10 \cdot v_1 - 9 \cdot v_2 \tag{4}$$

Weiterhin ist aus der Aufgabenstellung bekannt, daß die Zugspitze Berta $20\,min$ nach dem Überholvorgang an Alfred erreicht hat (siehe Schnittpunkt P_1 im $s - t$ Diagramm).

$$v_z \cdot (t_1 + t_3) = s_x + v_2 \cdot (t_1 + t_3) \quad \rightarrow \quad s_x = (v_z - v_2) \cdot (t_1 + t_3) \tag{5}$$

Der Schnittpunkt der Bewegungsgleichungen von Alfred und Berta ergibt den gesuchten Zeitpunkt t_x, an dem Alfred Berta eingeholt hat:

$$s_1(t_x) = v_1 \cdot t_x = s_2(t_x) = s_x + v_2 \cdot t_x \quad \rightarrow \quad t_x = \frac{s_x}{v_1 - v_2} \tag{6}$$

Den Ort s_x ersetzen wir jetzt mit Hilfe von Gleichung (5):

$$t_x = \frac{(v_z - v_2) \cdot (t_1 + t_3)}{v_1 - v_2} \tag{7}$$

Schließlich wird anstelle von v_z Gleichung (4) geschrieben:

$$t_x = \frac{(10 \cdot v_1 - 9 \cdot v_2 - v_2) \cdot (t_1 + t_3)}{v_1 - v_2} = 10 \cdot (t_1 + t_3) = 201\,min : 40s \tag{8}$$