Würfelsäulen

aus *Bild der Wissenschaft*

November 2005

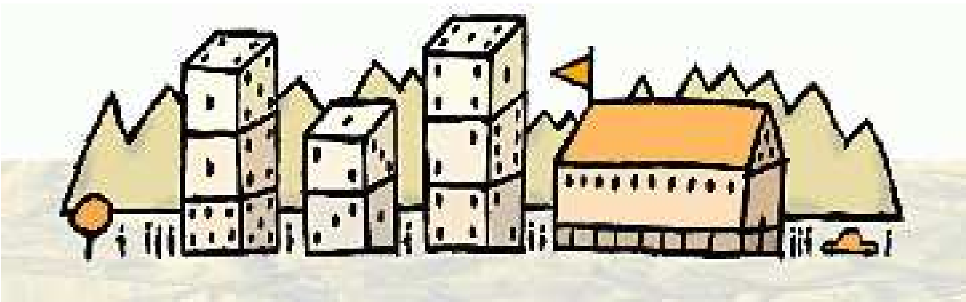

Abbildung 1: Die drei Würfelsäulen

Am letzten Samstag hatte ich mich mit meinen beiden Nachbarn Dieter und Ludger zu einem Dämmerschoppen in der Dorfkneipe getroffen. Wir wollten gerade bezahlen und nach Hause gehen, als Dieter auf seine Uhr sah und rief: 'Es ist kurz vor acht. Die Lottozahlen!' Ich sprang auf und ging schnell mit Dieter ins Nebenzimmer, wo ein Fernseher lief. Wir kamen gerade noch rechtzeitig zur Ziehung. Aber die Lottofee war uns wieder einmal nicht hold: Wir hatten beide nur zwei Richtige und nichts gewonnen.
Ludger, der immer behauptet, er verstehe etwas von Statistik und würde deshalb kein Lotto spielen, war an der Theke sitzengeblieben. Als wir wieder in die Schankstube zurückkamen, sahen wir, dass er sich vom Wirt etliche Würfel hatte geben lassen und sie vor sich auftürmte. Als er uns bemerkte, warf er sie rasch mit einer Handbewegung durcheinander.
'Na, wieder einmal nichts gewonnen?', fragte er. Wir schüttelten die Köpfe. 'Das hätte ich euch auch vorher sagen können', sagte er. 'Aber ich will euch heute Abend noch eine zweite Chance geben.' Er deutete auf die Würfel, die auf der Theke lagen. 'Ich kann aus Würfeln drei nebeneinanderstehende Säulen bauen, die einen fingerbreiten Abstand voneinander haben und nicht unbedingt gleich hoch sein müssen. Dadurch werden etliche Augen unsichtbar, da ein Teil der Würfelflächen entweder auf dem Boden liegt oder sich gegenseitig abdeckt. Die Augen, die auf den Oberseiten der drei Säulen liegen, betrachte ich als die drei Ziffern einer dreistelligen Zahl. Diese Zahl nenne ich die Kopfzahl. Das Produkt der drei Kopfziffern ergibt das Kopfprodukt.'
Dieter und ich sahen ihn fragend an. Ludger seufzte. 'Das ist natürlich anspruchsvoller, als Kreuzchen auf einen Lottoschein zu malen. Ich werde euch

deshalb ein Beispiel geben.' Er türmte acht Würfel zu drei Säulen auf. 'Auf den Oberseiten der Säulen seht ihr von links nach rechts die Augenzahlen 4, 1 und 5. Sie ergeben die Kopfzahl 415 und das Kopfprodukt $4 \cdot 1 \cdot 5 = 20$. Habt ihr das verstanden?' Wir nickten.
'Als ihr vor dem Fernsehen saßt, habe ich drei Würfelsäulen errichtet, bei der die Summe aller sichtbaren Augen gleich der Kopfzahl war und die Gesamtzahl der Würfel in den Säulen gleich dem Kopfprodukt. Wenn ihr mir innerhalb von 15 Minuten sagt, wie groß die Kopfzahl meiner Säulen war, bezahle ich eure Rechnung, ansonsten müsst ihr meine begleichen.' 'Einverstanden', sagte Dieter. 'So schwer kann das doch nicht sein.'
Bier erhöht jedoch nicht das Denkvermögen, und so hatten wir nach der Viertelstunde keine Lösung gefunden und mussten wohl oder übel Ludgers Getränke bezahlen. Wissen Sie, wie groß die Kopfzahl war?

Lösungsvorschlag

Die Summe der Augenzahl von zwei gegenüberliegenden Würfelflächen beträgt stets 7:

$$1 + 6 = 7; \qquad 2 + 5 = 7; \qquad 3 + 4 = 7 \tag{1}$$

Ein Würfel dessen Unter- und Oberseite in der Säule verdeckt ist, zeigt nach außen also stets $7 + 7 = 14$ Augen an. Beim obersten Würfel kommt die Augenzahl der Kopfseite hinzu. Bezeichne s_1, s_2, s_3 die Anzahl der Würfel in den drei Säulen. Bezeichne ferne k_1, k_2, k_3 die Augenzahlen der drei sichtbaren Deckflächen. Die gesamte, sichtbare Augenzahl der drei Säulen errechnet sich dann zu:

$$a = 14 \cdot (t_1 + t_2 + t_3) + k_1 + k_2 + k_3 \tag{2}$$

Die Kopfzahl berechnet sich aus der Dezimaldarstellung der Ziffern k_1, k_2 und k_3 :

$$k = 100 \cdot k_1 + 10 \cdot k_2 + k_3 \tag{3}$$

Nach Aufgabenstellung gilt nun $a = k$:

$$14 \cdot (t_1 + t_2 + t_3) + k_1 + k_2 + k_3 = 100 \cdot k_1 + 10 \cdot k_2 + k_3 \tag{4}$$

und

$$k_1 \cdot k_2 \cdot k_3 = t_1 + t_2 + t_3 \tag{5}$$

Aus Gleichung (4) erhalten wir:

$$t_1 + t_2 + t_3 = \frac{99\,k_1 + 9\,k_2}{14} \tag{6}$$

Der Vergleich mit (5) liefert:

$$\frac{99\,k_1 + 9\,k_2}{14} = k_1 \cdot k_2 \cdot k_3 \quad \rightarrow \quad k_3 = \frac{99\,k_1 + 9\,k_2}{14\,k_1\,k_2} \tag{7}$$

Für k_1, k_2 kommen nur die Zahlen von $1 \ldots 6$ in Frage. Es muß nun von den 36 möglichen Kombinationen für k_1, k_2 die bestimmt werden, die für k_3 in Gleichung (7) eine ganze Zahl liefert. Nach ein wenig Probieren findet man:

$$k_1 = 1, \quad k_2 = 3, \quad k_3 = 3 \tag{8}$$

Die gesuchte Kopfzahl lautet also 133. Die Anzahl der Würfel, aus denen die drei Säulen insgsamt aufgebaut wurden beträgt:

$$t_1 + t_2 + t_3 = k_1 \cdot k_2 \cdot k_3 = 1 \cdot 3 \cdot 3 = 9 \tag{9}$$

Es gibt mehre Möglichkeiten für die Verteilung der 9 Steine auf drei Säulen, z.B. $2, 3, 4, \quad 3, 3, 3$ oder $1, 3, 5$. Mit den Angaben aus der Aufgabe läßt sich das nicht eindeutig sagen.