

Der Schäferhund und seine Schafherde

Puzzel No.18 aus www.mathematik.ch

Der Schäferhund Boy befindet sich am Ende einer 1 km langen Schafherde, die sich mit konstanter Geschwindigkeit vorwärtsbewegt. Zur Kontrolle läuft er nun - mit einer grösseren konstanten Geschwindigkeit als die Herde - vom Ende bis zur Spitze der Herde und wieder an seinen Platz am Ende der Herde zurück. Als er wieder hinten ankommt, ist die Schafherde genau einen Kilometer weiter gewandert. Wie weit ist Boy gelaufen?



Abbildung 1: Schäferhund Boy

Lösungsvorschlag

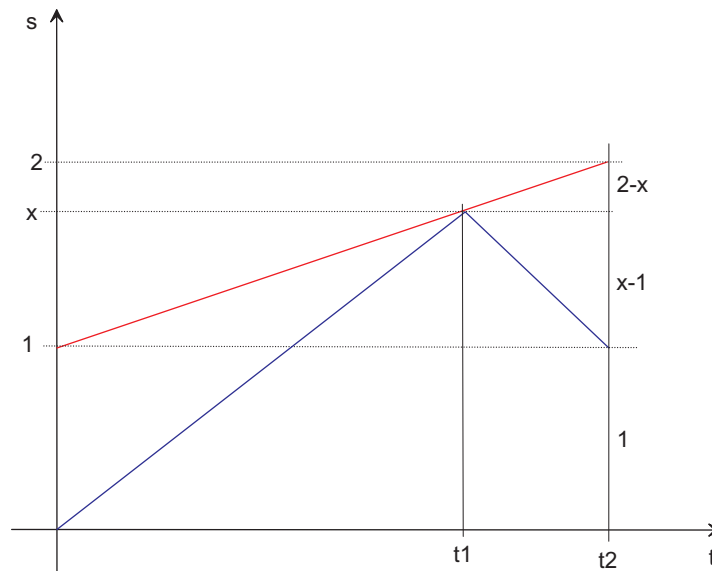


Abbildung 2: Weg-Zeit Diagramm

Wir veranschaulichen uns den Bewegungsablauf zwischen Schäferhund und Schafherde in einem Weg-Zeit-Diagramm. Da Hund und Schafherde sich mit jeweils konstanter Geschwindigkeit fortbewegen sind ihre Bewegungskurven Geraden im $s - t$ -Diagramm.

Die Spitze der Schafherde (rote Gerade) startet bei $s = 1 \text{ km}$, während der Hund (blaue Gerade) im Koordinatenursprung bei $s = 0$ losrennt. Der Anstieg der blauen Gerade ist größer, da der Hund schneller läuft als die Schafe.

Zum Zeitpunkt t_1 hat der Hund die Spitze der Schafherde erreicht. Die Entfernung betrage dann x Kilometer. Von $t = 0$ bis $t = t_1$ gelten folgende Gleichungen:

$$x = 1 + v_s \cdot t_1, \quad x = v_h \cdot t_1 \quad \rightarrow \quad \frac{v_h}{v_s} = \frac{x}{x-1} \quad (1)$$

Von t_1 an läuft der Hund in entgegengesetzter Richtung und erreicht zum Zeitpunkt t_2 wieder das Ende der Schafherde. Die Spitze der Schafherde befindet sich dann am Ort $s = 2 \text{ km}$ und der Hund ist bei $s = 1 \text{ km}$:

$$v_s = \frac{2-x}{t_2-t_1}, \quad v_h = \frac{x-1}{t_2-t_1} \quad \rightarrow \quad \frac{v_h}{v_s} = \frac{x-1}{2-x} \quad (2)$$

Der Vergleich zwischen Gleichung (1) und (2) liefert:

$$\frac{v_h}{v_s} = \frac{x}{x-1} = \frac{x-1}{2-x} \quad \rightarrow \quad (x-1)^2 = x \cdot (2-x) \quad (3)$$

Die quadratische Gleichung (3) besitzt die beiden Lösungen:

$$x_{1/2} = \frac{1}{2}(2 \pm \sqrt{2}) \quad (4)$$

Für uns kommt nur die Lösung x_2 in Frage da laut $s - t$ Diagramm $x > 1$ sein muß. Der Schäferhund legt die Strecke

$$s = x + (x - 1) = 2 \cdot x - 1 = (2 \pm \sqrt{2}) - 1 = 1 + \sqrt{2} \quad (5)$$

zurück.