Milchverteilung

7. Allunionsolympiade

Moskau, 1998

Sieben Zwerge sitzen mit ihrem Milchbecher an einem runden Tisch. In den Bechnern befinden sich insgesamt drei Liter Milch. Zwerg1 verteilt den Inhalt seines Becher gleichmäßig auf die Becher seiner Kameraden. Anschließend verteilt der nächste Zwerg, entgegen dem Uhrzeigersinn, seinen Becher gleichmäßig auf die der anderen. Schließlich verteilt auch der letzte Zwerg in der Runde seinen Becherinhalt. Nun hat am Ende jeder Zwerg wieder die gleiche Menge Milch in seinem Becher wie vor der Verteilung.
Bestimme den Inhalt der Becher zum Beginn der Verteilung!

Vorüberlegungen

Zwei Zwerge

Wir beginnen der Einfachheit halber mit zwei Zwergen. Die Inhalte ihrer Becher sei mit x_1 und x_2 bezeichnet. Zwerg1 gießt seinen Becher in den Becher von Zwerg2:

$$x_2 := x_2 + x_1$$

$$x_1 := 0$$

Jetzt füllt Zwerg2 seinen Becher in den von Zwerg1:

$$x_1 := 0 + x_2 + x_1$$

$$x_2 := 0$$

Am Ende der Verteilung ist der Becher vom Zwerg2 leer. Laut Aufgabenstellung soll der Endzustand gleich dem Anfangszustand sein, d.h. Zwerg2 muß am Anfang einen leeren Becher gehabt haben! Diese Überlegung gilt natürlich auch später für unsere sieben Zwerge. Wenn x_2 zu Beginn Null war muß $x_1 = 3\,L$ sein.

Drei Zwerge

Wir wissen bereits, dass $x_2 =$ zu Beginn sein muß. Die Mengengleichungen für jede Verteilungsrunde sehen dann so aus.

1. Runde, Zwerg1 verteilt seinen Becher auf Zwerg3 und Zwerg2:

$$x_3 := x_3 + \frac{1}{2}\,x_1$$

$$x_2 := x_2 + \frac{1}{2}\,x_1 = \frac{1}{2}\,x_1$$

$$x_1 := 0$$

2. Runde, Zwerg3 verteilt seinen Becher auf Zwerg2 und Zwerg1:

$$x_2 := \frac{1}{2}\,x_1 + \frac{1}{2}\left(x_3 + \frac{1}{2}\,x_1\right) = \frac{3}{4}\,x_1 + \frac{1}{2}\,x_3$$

$$x_1 := \frac{1}{2}\left(x_3 + \frac{1}{2}\,x_1\right) = \frac{1}{4}\,x_1 + \frac{1}{2}\,x_3$$

$$x_3 := 0$$

3. Runde, Zwerg2 verteilt seinen Becher auf Zwerg1 und Zwerg3:

$$x_1 := \frac{1}{4}\,x_1 + \frac{1}{2}\,x_3 + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\,x_1 + \frac{1}{2}\,x_3\right) = \frac{5}{8}\,x_1 + \frac{3}{4}\,x_3$$

$$x_3 := \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\,x_1 + \frac{1}{2}\,x_3\right) = \frac{3}{8}\,x_1 + \frac{1}{4}\,x_3$$

$$x_2 := 0$$

Nun soll der Endzustand gleich der Anfangsmenge sein, also:

$$x_1 = \frac{5}{8}\,x_1 + \frac{3}{4}\,x_3 \quad \rightarrow \quad \frac{3}{8}\,x_1 = \frac{3}{4}\,x_3 \quad \rightarrow \quad x_1 = 2\,x_3$$

$$x_3 = \frac{3}{8}\,x_1 + \frac{1}{4}\,x_3 \quad \rightarrow \quad \frac{3}{4}\,x_3 = \frac{3}{8}\,x_1 \quad \rightarrow \quad 2\,x_3 = x_1 x_2 := 0$$

Da in Summe drei Liter Milch in den Bechern ist, muß zu Beginn $x_1 = 2\,L$ und $x_3 = 1\,L$ Milch enthalten und wie bereits an Beginn erläutert ist $x_2 = 0\,L$. Die Rechnungen für vier und mehr Zwerge führt man besser in einem Computeralgebrasystem durch, da sonst die Übersicht schnell verloren geht.

Vier Zwerge

Wir berechnen die Verteilungszustände analog wie mit drei Zwergen und erhalten als Endgleichnugen in Mathematica:

$$x_1[1] = \frac{1}{81}\,(37\,x_1[1] + 36\,x_3[1] + 48\,x_4[1])$$

$$x_3[1] = \frac{1}{81}\,(16\,x_1[1] + 9\,x_3[1] + 12\,x_4[1])$$

$$x_4[1] = \frac{1}{81}\,(28\,x_1[1] + 36\,x_3[1] + 21\,x_4[1])$$

Von den drei Gleichnugen, sind je zwei linear abhängig. Als weitere Bedingung aus der Aufgabenstellung wissen wir:

$$x_1[1] + x_2[1] + x_3[1] + x_4[1] = 3, \quad x_2[1] = 0$$

Die Auflösung der Gleichungen ergibt schließlich:

$$x_1[1] = \frac{3}{2}, \quad x_2[1] = 0, \quad x_3[1] = \frac{1}{2}, \quad x_4[1] = 1$$

Lösungsvorschlag für sieben Zwergen

Wir berechnen die Verteilungszustände erhalten als Endgleichnugen in Mathematica:

$$x_1[1] = \frac{70993\,x_1[1] + 42\,(1296\,x_3[1] + 7\,(216\,x_4[1] + 252\,x_5[1] + 294\,x_6[1] + 343\,x_7[1]))}{279936}$$

$$x_3[1] = \frac{16807\,x_1[1] + 6\,(1296\,x_3[1] + 7\,(216\,x_4[1] + 252\,x_5[1] + 294\,x_6[1] + 343\,x_7[1]))}{279936}$$

$$x_4[1] = \frac{31213\,x_1[1] + 6\,(9072\,x_3[1] + 13\,(216\,x_4[1] + 252\,x_5[1] + 294\,x_6[1] + 343\,x_7[1]))}{279936}$$

$$x_5[1] = \frac{43561\,x_1[1] + 6\,(9072\,x_3[1] + 10584\,x_4[1] + 127\,(36\,x_5[1] + 42\,x_6[1] + 49\,x_7[1]))}{279936}$$

$$x_6[1] = \frac{54145\,x_1[1] + 6\,(9072\,x_3[1] + 10584\,x_4[1] + 12348\,x_5[1] + 6630\,x_6[1] + 7735\,x_7[1])}{279936}$$

$$x_7[1] = \frac{63217\,x_1[1] + 54432\,x_3[1] + 63504\,x_4[1] + 74088\,x_5[1] + 86436\,x_6[1] + 54186\,x_7[1]}{279936}$$

Von den sieben Gleichungen, sind je zwei paarweise, linear abhängig. Als weitere Bedingung aus der Aufgabenstellung wissen wir:

$$x_1[1] + x_2[1] + x_3[1] + x_4[1] + x_5[1] + x_6[1] + x_7[1] = 3, \quad x_2[1] = 0$$

Die Auflösung der Gleichungen ergibt schließlich:

$$x_1[1] = \frac{6}{7}, \quad x_2[1] = 0, \quad x_3[1] = \frac{1}{7}, \quad x_4[1] = \frac{2}{7}, \quad x_5[1] = \frac{3}{7}, \quad x_6[1] = \frac{4}{7}, \quad x_7[1] = \frac{5}{7}$$