Ankunft in Lestär

Eine Aufgabe von Swen Lünig, Petershagen b. Berlin

12. Juni 2001

Daniela fuhr zu ihrer Schwester von Lebonk nach Lestär. Sie stand während der halbstündigen Fahrt vorn im Zug und schaute aus dem Fenster, als sie den Fahrplan auf dem Bahnsteig des Bahnhofes von Lestär bemerkte. *Jetzt muss ich mich aber beeilen* schoss es ihr durch den Kopf und sie machte sich auf den Weg an das Ende des Zuges, wo ihre Reisetasche an der Tür stand.

Der Zug war leer und Daniela kam ohne Unterbrechung voran, als sie aus dem Fenster sah, wie sie an ihrer Schwester, die auf dem Bahnsteig stand, vorbeifuhr. Nachdem Daniela 12 Meter gelaufen war, kam sie erneut an ihrer Schwester vorbei.

Die Tür mit der Reisetasche wurde von Daniela genau zu dem Zeitpunkt, als der Zug zum Stehen kam, erreicht. Sie öffnete die Tür und stieg am Fahrplan aus. Die Schwester hatte ihre Position während der Einfahrt des Zuges nicht verändert und stand 8 Meter vom Fahrplan entfernt.

Wie weit lief Daniela im Zug zurück ?

Punktezahl = 8

Originallösung vom Author

Die Situation zu Beginn der Einfahrt ist in Abb. 1 angedeutet. Daniela befindet sich am Anfang des Zuges gegenüber des Fahrplans und läuft los in Richtung des Ende des Zuges.

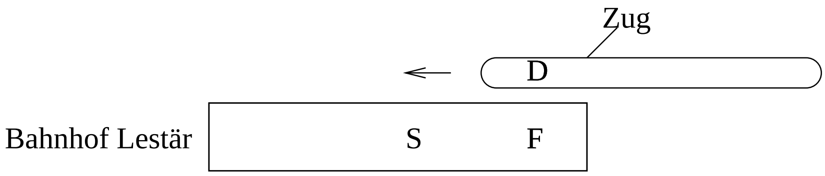

Abbildung 1: Einfahrt des Zuges in Lestär. D = Daniela, S = Schwester, F = Fahrplan

Als räumliches Bezugssystem zur weiteren Beschreibung der Bewegungsvorgänge wird der Bahnhof angenommen. Der Koordinatenursprung liegt bei dem Fahrplan. Positive Koordinatenwerte in Meter liegen in Richtung der Schwester. Als zeitlicher Koordinatenursprung dient der Zeitpunkt des Loslaufens von Daniela. Während der weiteren Einfahrt nehmen die Koordinatenwerte zu. Abbildung 2 zeigt die Situation bei Halt des Zuges.

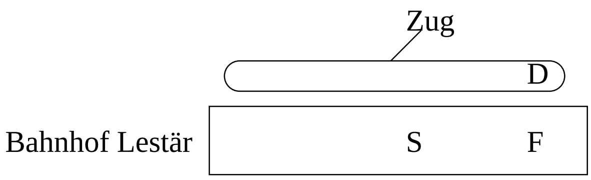

Abbildung 2: Stillstand des Zuges. D = Daniela, S = Schwester, F = Fahrplan

Die Koordinate des Loslaufpunktes von Daniela zum Zeitpunkt t wird mit $s_L(t)$ bezeichnet. Zum Zeitpunkt $t = 0$ befindet sich der Punkt gegenüber dem Fahrplan.

$$s_L(0) = 0 \tag{1}$$

Bei Halt des Zuges ($t = t_H$, $0 < t_H$) befindet sich der Loslaufpunkt fast am anderen Ende des Bahnsteiges.

$$s_L(t_H) = l \qquad (0 < l) \tag{2}$$

Die Geschwindigkeit beim Halt ist praktischerweise Null.

$$\frac{ds_L(t_H)}{dt}(t_H) = 0 \tag{3}$$

Als Ansatz für die Bewegungsgleichung des Loslaufpunktes wird

$$s_L(t) = \frac{-a_Z}{2}(t - t_H)^2 + l \tag{4}$$

gewählt. Die Bedingungen 2 und 3 sind sofort erfüllt. Aus Bedingung 1 ergibt sich

$$a_Z = \frac{2l}{t_H^2} \tag{5}$$

und somit als endgültige Bewegungsgleichung

$$s_L(t) = \frac{-l}{t_H^2}(t - t_H)^2 + l \tag{6}$$

Die Koordinate von Daniela zum Zeitpunkt t wird mit $s_D(t)$ bezeichnet. Sie befindet sich zum Zeitpunkt $t = 0$ gegenüber dem Fahplan.

$$s_D(0) = 0 \tag{7}$$

Bei Halt des Zuges erreicht sie die Tür mit ihrer Reisetasche und steigt wiederum gegenüber dem Fahrplan aus.

$$s_D(t_H) = 0 \tag{8}$$

Sie läuft zum Zeitpunkt $t = 0$ vom Loslaufpunkt entgegengesetzt zur Bewegungsrichtung des Zuges mit konstanter Geschwindigkeit los. Ihre Ortskoordinate ergibt sich somit aus der Bewegung des Loslaufpunktes $s_L(t)$ und ihrer Bewegung innerhalb des Zuges

$$s_D(t) = s_L(t) - v_D * t \tag{9}$$

Bedingung 7 ist sofort erfüllt. Mit Bedingung 8 ergibt sich

$$0 = s_L(t_H) - v_D * t_H \tag{10}$$

und unter Berücksichtigung von 2 schließlich

$$v_D = \frac{l}{t_H} \tag{11}$$

Einsetzen in 9 ergibt die endgültige Bewegungsgleichung für Daniela

$$\begin{aligned}
s_D(t) &= s_L(t) - \frac{l * t}{t_H} && (12)\\
&= \frac{-l}{t_H^2}(t - t_H)^2 + l - \frac{l * t}{t_H} && (13)\\
&= \frac{-l(t - t_H)^2 + l * t_H^2 - l * t * t_H}{t_H^2} && (14)\\
&= l\frac{-t^2 + 2t * t_H - t_H^2 + t_H^2 - t * t_H}{t_H^2} && (15)\\
&= \frac{l}{t_H^2}(t * t_H - t^2) && (16)
\end{aligned}$$

Betrachtung der Ableitung von 16

$$\frac{ds_D(t)}{dt} = \frac{l}{t_H^2}(t_H - 2t) \tag{17}$$

ergibt als Extremwert den Zeitpunkt $t_H/2$. Es handelt sich dabei um das globale Maximum, wie der geneigte Leser sich leicht klar macht. Während der Einfahrt ist Daniela also nach der halben Einfahrtszeit am weitesten vom Fahrplan entfernt. Als maximale Entfernung ergibt sich $s_D(t_H/2) = l/4$.

Zum Zeitpunkt t_{S1} bewegt sich Daniela zum ersten Mal an ihrer Schwester vorbei. Die zweite Begegnung findet zum Zeitpunkt t_{S2} statt. Es gilt offensichtlich $0 < t_{S1} < t_H/2 < t_{S2} < t_H$. Während dieser Zeit bewegt sich Daniela im Zug um l_D mit der konstanten Geschwindigkeit v_D

$$v_D = \frac{l_D}{t_{S2} - t_{S1}} \tag{18}$$

Einsetzen von 11 und Umstellen nach dem zweiten Zeitpunkt ergibt

$$t_{S2} = \frac{t_H * l_D}{l} + t_{S1} \tag{19}$$

Da sich die Position der Schwester während der Einfahrt nicht verändert hat, gilt

$$\begin{aligned}
s_D(t_{S1}) &= s_D(t_{S2}) && (20)\\
\frac{l}{t_H^2}(t_{S1} * t_H - t_{S1}^2) &= \frac{l}{t_H^2}(t_{S2} * t_H - t_{S2}^2) && (21)\\
t_{S1} * t_H - t_{S1}^2 &= t_{S2} * t_H - t_{S2}^2 && (22)\\
t_{S2}^2 - t_{S1}^2 &= t_{S2} * t_H - t_{S1} * t_H && (23)\\
(t_{S2} - t_{S1})(t_{S2} + t_{S1}) &= t_H(t_{S2} - t_{S1}) && (24)\\
t_{S2} + t_{S1} &= t_H && (25)
\end{aligned}$$

Mit Gleichung 19 ergibt sich als Zeitpunkt der ersten Begegnung

$$\begin{aligned}
t_{S1} &= \frac{t_H}{2} - \frac{t_H * l_D}{2l} && (26)\\
&= \frac{t_H}{2}(1 - \frac{l_D}{l}) && (27)
\end{aligned}$$

Zu diesem Zeitpunkt befindet sich Daniela also bei ihrer Schwester. Ihre Position entspricht dann der Entfernung zwischen der Schwester und dem Fahrplan und damit der Entfernung zwischen beiden bei Halt des Zuges.

$$\begin{aligned}
s_D(t_{S1}) &= \frac{l}{t_H^2}\left(t_{S1} * t_H - t_{S1}^2\right) && (28)\\
&= \frac{l}{t_H^2} t_{S1}\left(t_H - t_{S1}\right) && (29)\\
&= \frac{l}{t_H^2}\frac{t_H}{2}\left(1 - \frac{l_D}{l}\right)\left(t_H - \frac{t_H}{2}\left(1 - \frac{l_D}{l}\right)\right) && (30)\\
&= \frac{l}{t_H^2}\frac{t_H}{2}\left(1 - \frac{l_D}{l}\right)\left(t_H - \frac{t_H}{2} + \frac{t_H * l_D}{2l}\right) && (31)\\
&= \frac{l}{t_H^2}\frac{t_H}{2}\left(1 - \frac{l_D}{l}\right)\left(\frac{t_H}{2} + \frac{l_D * t_H}{2l}\right) && (32)\\
&= \frac{l}{t_H^2}\frac{t_H^2}{4}\left(1 - \frac{l_D}{l}\right)\left(1 + \frac{l_D}{l}\right) && (33)\\
&= \frac{l}{4}\left(1 - \frac{l_D}{l}\right)\left(1 + \frac{l_D}{l}\right) && (34)
\end{aligned}$$

$$= \frac{l}{4}\left(1 - \frac{l_D^2}{l^2}\right) \quad (35)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{l^2 - l_D^2}{l}\right) \quad (36)$$

Letzlich ergibt sich folgende Gleichung für die drei Größen:

$$0 = l^2 - 4s_D(t_{S1}) * l - l_D^2 \quad (37)$$

Nach Einsetzen der bekannten Werte in die möglichen Lösungen für l

$$l_{01/02} = 2s_D(t_{S1}) \pm \sqrt{4s_D^2(t_{S1}) + l_D^2} \quad (38)$$

$$= 16 \pm 4 * 5 \quad (39)$$

$$(40)$$

ergibt sich als zurückgelegte Entfernung im Zug 36 m.

Lösungsweg von Ingmar Rubin, Berlin

Es seien folgende Bezeichner gewählt:

- v_d Geschwindigkeit von Daniela ,
- v_z Geschwindigkeit vom Zug ,
- v_0 Einfahtgeschwindigkeit des Zuges in den Bahnhof
- $s_d(t)$ Ort von Daniela in Abhängigkeit von der Zeit,
- $s_z(t)$ Ort von der Zugspitze in Abhängigkeit von der Zeit
- z Zuglänge ,
- $s_1 = 8\,m$ Standort der Schwester bezogen auf die Fahrplantafel
- $s_2 = 12\,m$ Ortsdifferenz zwischen der Daniela ihre Schwester im Zug gesehen hat

Wir gehen davon aus, das der Zug bei Einfahrt in den Bahnhof mit konstanter Bremsverzögerung b von seiner Anfangsgeschwindigkeit v_0 bis zum Stillstand bremst.

$$v_z = v_0 - b\,t \tag{1}$$

Der Bremsweg von der Fahrplantafel bis zum Haltepunkt entspricht der Zuglänge z, da Daniela bei Halt des Zuges genau an der Fahrplantafel aussteigt. Daraus können wir die Verzögerung b ermitteln:

$$b = \frac{{v_0}^2}{2\,z} \quad \rightarrow \quad v_z = v_0 \; - b\,t = v_0 - \frac{{v_0}^2}{2\,z}\,t \tag{2}$$

Integration über t ergibt :

$$s_z = \int_0^t \left(v_0 - \frac{{v_0}^2}{2\,z}\,t \right)\,dt = v_0\,t - \frac{{v_0}^2}{4\,z}\,t^2 \tag{3}$$

Daniela bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit gegen die Fahrtrichtung des Zuges:

$$s_d = -v_d\,t \tag{4}$$

Für einen auf dem Bahnhof stehenden Beobachter überlagern sich beide Bewegungen, d.h. Daniela bewegt sich nach:

$$s_{z+d} = s_z(t) + s_d(t) = (v_0 - v_d)\,t - \frac{{v_0}^2}{4\,z}\,t^2 \tag{5}$$

Die Zeit bis zum Stillstand, d.h. $v_z = 0$, sei mit t_x bezeichnet:

$$0 = v_0 - \frac{{v_0}^2}{2\,z}\,t \quad \rightarrow \quad t_x = \frac{2\,z}{v_0} \tag{6}$$

In dieser Zeit t_x muß Daniela die gesamte Zuglänge ablaufen:

$$z = v_d\, t_x = v_d\, \frac{2\,z}{v_0} \quad \rightarrow \quad v_0 = 2\,v_d \tag{7}$$

Das bedeutet, das der Zug bei Einfahrt in den Bahnhof die doppelte Geschwindigkeit hatte als Daniela. Das Ergebnis aus Gleichung (7) setzen wir in (5) ein :

$$s_{z+d} = v_d\, t - \frac{{v_d}^2}{z}\, t^2 \tag{8}$$

Eine Linie $s_1 = const$ schneidet die Parabel s_{z+d} in zwei Punkten (Abbildung 2).

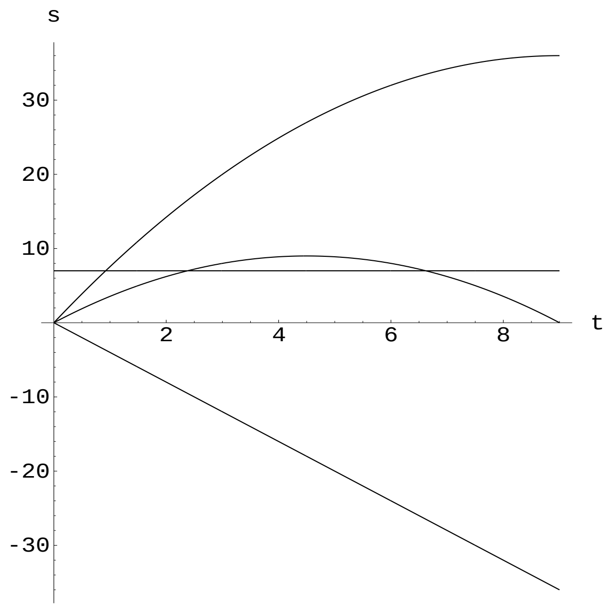

Abbildung 1: Bewegungsgleichungen von Daniela, dem Zug und Daniela+Zug

$s_1 = 8\,m$ ist der Standort der Schwester auf dem Bahnhof, bezogen auf die Fahrplantafel. Wir bezeichnen die beiden Zeitpunkte mit t_1, t_2, an der die Parabel geschnitten wird.

$$s_1 = v_d\, t - \frac{{v_d}^2}{z}\, t^2 \tag{9}$$

Die Lösung der quadratischen Gleichung ergibt:

$$t_1 = \frac{z - \sqrt{-4\,s_1\,v_d\,z + v_d\,z^2}}{2\,v_d}, \quad t_2 = \frac{z + \sqrt{-4\,s_1\,v_d\,z + v_d\,z^2}}{2\,v_d} \tag{10}$$

Aus der Aufgabenstellung ist nun bekannt, das Daniela zwischen den Zeitpunkten t_1 und t_2 den Weg $s_2 = 12\,m$ zurückgelegt hat :

$$s_2 = (t_2 - t_1)\,v_d = \sqrt{z\,(z - 4\,s_1)} \quad \rightarrow \quad z = 2\,s_1 + \sqrt{4\,{s_1}^2 + {s_2}^2} = 36\,m \tag{11}$$