

400 m - Lauf

40. Mathematikolympiade

Magdeburg, 13. - 16. Mai 2000

Andreas, Martin und Robert starten gleichzeitig zum 400 m Lauf. Als Andreas im Ziel war, hatte Martin noch genau 20 m zu laufen. Als Martin als zweiter Läufer das Ziel erreichte, blieben für Robert noch 20 m .

Wie weit war Robert vom Ziel entfernt, als Andreas das Ziel erreichte ?

Es sei angenommen, dass jeder der drei Genannten die gesamte Strecke mit konstanter Geschwindigkeit durchliefen.

Punktezahl=6

Lösungsweg

Wir fertigen ein $s - t$ Diagramm an, in das wir die drei Bewegungsgleichungen der Läufer einzeichnen. Da alle Drei gleichzeitig im Start loslaufen, beginnen die drei Geraden mit $v = \text{const.}$ im Koordinatenursprung. Der unterschiedliche Anstieg charakterisiert die unterschiedlich hohen Geschwindigkeiten der Läufer.

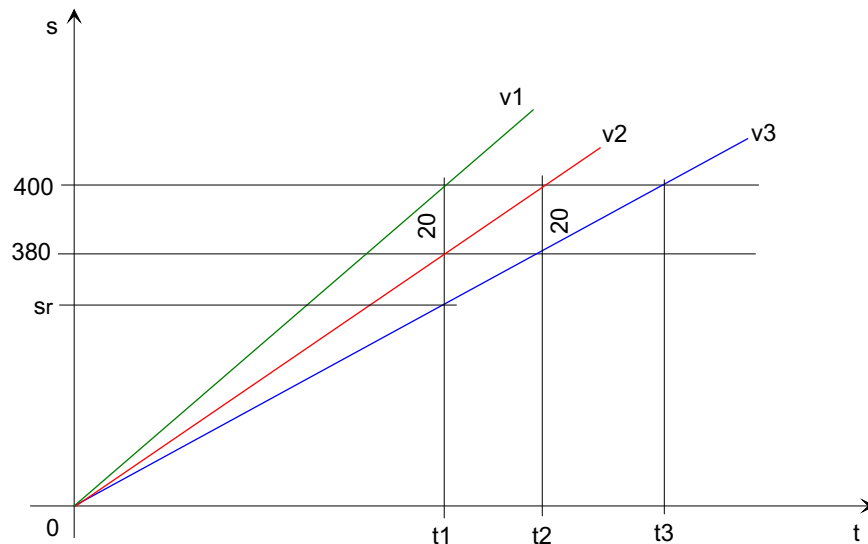


Abbildung 1: Weg-Zeit-Diagramm der 400 m - Läufer

Die Zeiten t_1, t_2, t_3 bezeichnen die Zeitpunkte, zu denen jeder Läufer das 400 m Ziel erreicht, also :

$$t_1 = \frac{s}{v_1}, \quad t_2 = \frac{s}{v_2}, \quad t_3 = \frac{s}{v_3}, \quad s = 400\text{ m} \quad (1)$$

Bezeichne s_r den Ort von Robert am Zeitpunkt t_1 . Mit dem Strahlensatz lassen sich zwei Verhältnisgleichungen aufstellen :

$$\frac{t_1}{s - 20} = \frac{t_2}{s}, \quad \frac{t_2}{s - 20} = \frac{t_1}{s_r} \quad (2)$$

Wir lösen nun beide Gleichungen nach t_2 auf und können anschließend t_1 eliminieren:

$$t_2 = \frac{s \cdot t_1}{s - 20} = \frac{t_1 \cdot (s - 20)}{s_r} \rightarrow s_r = \frac{(s - 20)^2}{s} = 361\text{ m} \quad (3)$$

Die Differenz zwischen $s - s_r$ gibt die gesuchte Entfernung von Robert zum Ziel am Zeitpunkt t_1 :

$$\Delta s = s - s_r = 400 - 361 = 39\text{ m} \quad (4)$$